UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

GIOVANNY AUGUSTO SEVERINO

DA METAMATEMÁTICA AOS MODELOS: UMA ANÁLISE DA NOÇÃO TARSKIANA DE CONSEQUÊNCIA

Maringá, PR
2021

GIOVANNY AUGUSTO SEVERINO

DA METAMATEMÁTICA AOS MODELOS:
UMA ANÁLISE DA NOÇÃO TARSKIANA DE CONSEQUÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Estadual de Maringá, como condição parcial para a obtenção do grau de *Mestre em Filosofia*, sob a orientação do Professor Doutor Evandro Luís Gomes.

Este exemplar corresponde a versão final apresentada por Giovanny Augusto Severino, perante Comissão Examinadora, orientada pelo Professor Doutor Evandro Luís Gomes. PGF, 27/08/2021.

Maringá, PR
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Severino, Giovanny Augusto
S498d Da metamatemática aos modelos : uma análise da noção tarskiana de consequência / Giovanny Augusto Severino. -- Maringá, PR, 2021.
104 f.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Luís Gomes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, 2021.

1. Consequência lógica. 2. Tarski, Alfred, 1901-1983. 3. Metamatemática . 4. Metalógica. 5. Lógica - História. I. Gomes, Evandro Luís, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

CDD 23.ed. 160

Síntique Raquel Eleutério - CRB 9/1641

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

GIOVANNY AUGUSTO SEVERINO

“DA METAMATEMÁTICA AOS MODELOS: UMA ANÁLISE DA NOÇÃO TARSKIANA DE CONSEQUÊNCIA”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Maringá, como condição parcial para a obtenção do grau de *Mestre em Filosofia* sob a orientação do Prof. Dr. Evandro Luís Gomes.

Este exemplar corresponde à versão definitiva da dissertação defendida perante a Banca Examinadora.

Aprovado em 27 de agosto de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evandro Luís Gomes
Presidente/Orientador

Av. Colombo, 5.790 / Bloco H-35 sala 003 – Câmpus Universitário – CEP 87.020-900 – Maringá – PR.
Fones: (44) 3011-8983 - e-mail: sec-pgf@uem.br
Internet: www.pgf.uem.br

Folha de aprovação suplementar

Giovanny Augusto Severino
Da metamatemática aos modelos:
uma análise da noção tarskiana de consequência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Estadual de Maringá, como condição. parcial para a obtenção do grau de *Mestre em Filosofia*

A Banca Examinadora dos trabalhos de Defesa da Dissertação de Mestrado,
em sessão pública, realizada em 27 de agosto de 2021,
considerou o candidato Giovanny Augusto Severino aprovado.

Banca Examinadora

Professor Doutor Evandro Luís Gomes (orientador)
Universidade Estadual de Maringá, PR
Professor Mateus Ricardo Fernandes Ferreira
Universidade Estadual de Maringá, PR
Professor Doutor Alexandre Fernandes Batista Costa Leite
Universidade de Brasília, DF

Membros suplentes
Professor Doutor Max Rogério Vicentini
Universidade Estadual de Maringá, PR
Professor Doutor Hércules de Araújo Feitosa
Universidade Estadual Paulista/Campus Marília, SP

Para

Keyde & Clóvis

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, aos meus pais, que apesar de diversas dificuldades, sempre me apoiaram nas escolhas que fiz. Agradeço aos meus avós pela paciência neste período em que nosso convívio foi restringido. Agradeço também aos professores membros da banca examinadora, pelos comentários gentis e apontamentos preciosos, e em especial, ao Professor Evandro Luís Gomes, que aceitou o desafio dessa pesquisa, cujo suporte e acolhimento possibilitaram este trabalho. Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa, sem a qual não seria possível a dedicação ao projeto de pesquisa.

Esta dissertação foi escrita num período de pandemia, que impôs restrições severas às relações humanas. Por isso, gostaria de fazer um agradecimento especial para as pessoas com quem pude conviver de perto durante esse percurso. Primeiro, gostaria de agradecer aos amigos Cido e Erick, pelas conversas sobre filosofia e música ao longo desses anos, que sempre me estimularam e me ajudaram em períodos difíceis. Por fim, agradeço a Gabriella, que dividiu comigo intensamente cada momento até aqui, sua companhia e ajuda foram essenciais! A todos, muito obrigado!

Maringá (PR), agosto de 2021.
Giovanny

Naquele tempo existiu um homem. Ele existiu e existe, pois narramos sua história. Existiu porque nós existimos. Num certo tempo existirá um homem, uma vez que plantamos oliveiras para ele e desejamos que usufrua do horto.

— Heller,
Uma teoria da história, 1993.

Resumo

SEVERINO, Giovanny. *Da metamatemática aos modelos: uma análise da noção tarskiana de consequência*. (Agosto, 2021). 104p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.

O principal objetivo desta dissertação é abordar questões históricas e filosóficas em torno da noção de consequência, introduzida em duas etapas por Alfred Tarski em 1930 e 1936. Por meio de escritos do próprio autor sobre os fundamentos da matemática, procuramos analisar como tais teorias se relacionam com duas abordagens distintas, que foram amplamente desenvolvidas no final do século XIX e começo do XX, denominadas teórico-dedutiva e semântica. Assim, ao analisarmos as teorias tarskianas de consequência, procuramos analisar questões filosóficas, principalmente aquelas relacionadas às estratégias utilizadas e o contexto em que foram desenvolvidas.

Palavras-chave: consequência lógica, Alfred Tarski, operador de consequência, história da lógica, filosofia da lógica, abordagem formal teórico-dedutiva, abordagem formal à luz de modelos e estruturas.

Abstract

SEVERINO, Giovanny. *Da metamatemática aos modelos: uma análise da noção tarskiana de consequência*. (August, 2021). 104p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.

The main objective of this dissertation is to address historical and philosophical issues around the notion of consequence, introduced in two stages by Tarski in 1930 and 1936. Through the author's own writings on the foundations of mathematics, we seek to analyze how such theories account to two distinct approaches, which were developed in the late nineteenth and early twentieth centuries, called theoretical-deductive and semantic. Thus, when analyzing the Tarskian theories of consequence, we seek to note philosophical issues, mainly related to the guidelines used and the context in which they were developed.

Keywords: logical consequence, Tarski, consequence operator, history of logic, philosophy of logic, formal theoretical-deductive approach, formal model-theoretical approach.

Sumário

da metamatemática aos modelos:

uma análise da noção tarskiana de consequência

Introdução

Podemos notar nas diversas áreas do saber humano que alguns conceitos e noções, alcançam tamanho sucesso no que buscam representar, que acabam adquirindo certo *status* de obviedade. Assim, o conceito acaba por se tornar sinônimo do objeto ao qual se refere. Algo similar parece envolver a noção de consequência lógica se observarmos a maneira que tal noção tem sido apresentada nos livros–texto de lógica. A lógica é uma área do conhecimento com muitos personagens importantes, porém, devido às influências sobre a noção de consequência lógica como a conhecemos atualmente, Alfred Tarski parece assumir certo protagonismo. A forma, o rigor e a profundidade dos trabalhos tarskianos a respeito da noção de verdade e de consequência lógica justificam o fato de ser com frequência considerado como um dos lógicos mais influentes do século XX. Há divergências quanto a considerar Tarski como responsável direto pela moderna teoria de modelos, mas podemos ao menos apontar que a maneira como ele aborda importantes assuntos em lógica e matemática, trouxe maior clareza e rigor para questões envolvendo sistemas formais dedutivos[1]. De qualquer forma, devemos notar que Tarski não se tornou notável apenas por seus trabalhos, mas também por suas qualidades enquanto professor. Não há dúvida quanto à sua influência na sistematização e divulgação dos então recentes desenvolvimentos da lógica formal e sistemas formais dedutivos. No presente trabalho interessa-nos situar os trabalhos tarskianos sobre a noção de consequência dentro de um panorama histórico de discussões e das abordagens de tal noção. Assim, como qualquer grande autor, Tarski pertence a um circulo intelectual notável, onde pôde vivenciar importantes acontecimentos, tendo a oportunidade de colher valiosa convivência, ser influenciado e também exercer sua influência. Desse modo, pretendemos analisar os trabalhos de Tarski a respeito, por eles mesmos, à luz de seus contextos históricos, tendo como ponto de partida princi-

[1] Essa divergência ocorre pelo fato de que autores como Etchemendy apontam para os reais objetivos que Tarski tinha em mente quando escreveu sua monografia 'Sobre o conceito de Verdade em linguagens formalizadas', em 1933, e 'Sobre o conceito de consequência lógica', em 1936. Etchemendy argumenta que Tarski pretendia investigar conceitos semânticos de modo que pudessem ser incorporados às teorias dedutivas formais e não, como costuma-se pensar, em uma teoria semântica propriamente dita. Assim também ocorre com a noção de consequência lógica, na medida que o objetivo de Tarski é de fornecer um tratamento formal adequado da noção intuitiva de consequência e não fornecer propriamente uma teoria semântica. Nesse sentido, Etchemendy aponta que a moderna teoria de modelos, de certa maneira, uniu essas duas abordagens, estendendo a noção de consequência lógica à noção de verdade lógica.

palmente o desenvolvimento da lógica matemática e os estudos alavancados por essa disciplina, sendo a própria biografia e trajetória intelectual de Tarski uma interessante fonte para observarmos importantes momentos da moderna história da lógica.

Mais recentemente alguns autores como Hanson, Etchemendy, Shapiro e Dag Pawitz têm apresentado uma análise geral das formas com que a noção de consequência tem sido tratada à luz dos recentes avanços nas técnicas lógicas e que se dividem em duas abordagens, uma dedutiva, comum a teoria da prova, e uma semântica, comum à teoria de modelos. Há autores como Asmus e Restall que se propõem a olhar para a história da lógica por meio de questões centrais a respeito de uma caracterização da noção de consequência, chegando a observar nesse panorama histórico duas principais noções pré-teóricas da noção de consequência, ali denominadas "abordagem por propriedades" e "abordagem por transferência." Nesse sentido, nosso foco é apresentar os trabalhos de Tarski sobre consequência, a partir dos dois aspectos desenvolvidos pelos dois grupos de comentadores citados anteriormente. Tais aspectos dizem respeito às técnicas utilizadas e as noções pré-teóricas pressupostas em cada abordagem. Ou seja, pretendemos situar as contribuições de Tarski dentro de uma certa abordagem técnica tradicional, isto é, analisando certa noção pré-teórica de consequência.

Assim, devemos fazer algumas considerações históricas a respeito de tais abordagens. Porém, antes de adentramos à discussão sobre o papel de cada abordagem em relação a noção de consequência, é importante ressaltarmos a relevância dessa noção para lógica, e para as disciplinas que de alguma maneira fundamentam-se nela. De modo geral, o expediente da lógica é comumente apresentado como o estudo dos métodos para se obter *bons argumentos*. Com o intuito de precisar melhor o que seriam bons argumentos, é introduzida a noção de *inferência válida*. Então, para caracterizar melhor o conceito de validade de uma inferência é comum recorrer à explicação de que, uma inferência composta por premissas e uma conclusão é considerada válida, se a conclusão é uma *consequência* das premissas. Assim, de maneira geral, é do interesse da lógica investigar o que significa uma relação de consequência, ou seja, o que significa dizer que uma conclusão é consequência das premissas, e como tal relação pode ser caracterizada.

Ao longo da história da lógica, a noção de consequência foi caracterizada de diversas maneiras, nem sempre de maneira direta, muitas vezes suas características refletem outras peculiaridades da teoria lógica em questão. Assim, para se aprofundar na noção de consequência, muitas vezes, é preciso compreender como um todo a teoria lógica em questão, isto é, saber como são entendidas as noções usadas, por exemplo, o que pode ser uma premissa, quais as maneiras admitidas como válidas para que a conclusão seja considerada como consequência das premissas. Ou seja, quando a noção de consequência lógica não é propriamente debatida e apresentada nos textos dos autores, é preciso tomar o conjunto da obra e pelo tratamento dado as questões anteriormente mencionadas, observarmos como a noção de consequência é abordada. Isso é importante por uma questão metodológica praticada nesta investigação para abordar a noção de consequência em autores que antecedem a Tarski, e que são importantes para os trabalhos tarskianos na medida em que tomam os primeiros como objeto de investigação. Por exemplo, no Capítulo 2 analisamos a maneira como os autores como Frege e Hilbert pretendem, a partir dos métodos formais, capturar certa concepção de consequência lógica.

A partir disso, nossa pesquisa restringe-se à análise da noção de consequência abordada de duas maneiras distintas por Alfred Tarski em 1930 e 1936.[2] As investigações de Tarski floresceram no período em que a lógica acha-se relacionada profundamente com a matemática, ou seja, quando a atividade lógica, como caracterizamos anteriormente, é trabalhada nos moldes e com as ferramentas do que nos dias atuais denomina-se de lógica simbólica ou matemática. Assim, entende-se aqui, por lógica matemática, a utilização de ferramentas e métodos de índole matemática para se investigar a problemática da lógica como já mencionado, bem como aplicadas aos raciocínios tipicamente matemáticos.[3]

Para analisarmos a noção de consequência lógica tal como abordada pela teoria da prova, ou seja, em termos de dedutibilidade, é importante observarmos o procedimento considerado adequado para essa abordagem e que encontra sua origem na ideia de uma demonstração formal. Esta noção desenvolve-se junto à ideia de prova, isto é, a partir do desenvolvimento de noções como dedução, demonstração, axiomatização, empregadas na fundamentação de disciplinas matemáticas. Dessa forma, é interessante notarmos que a ideia de prova e sua formulação mais atual, como demonstração formal, pretende que o processo considerado adequado para tal, seja capaz de expressar resultados válidos, ou seja, consequências legítimas (ou verdadeiras). Em outras palavras, a ideia de demonstração acaba por coincidir com a de prova. Assim sendo, é interessante investigarmos como essa noção de demonstração se desenvolve den-

[2] Blanché (1996, p. 391): "O seu primeiro estudo notório, que data de 1928, aborda os «conceitos fundamentais da metamatemática», termo que Tarski utilizará sempre, ao contrário de Hilbert, sem lhe associar a ideia de uma restrição metodológica a noções ou a raciocínios elementares. Aí caracteriza axiomaticamente o conjunto $Cn(X)$ das consequências de um conjunto X qualquer de fórmulas com o auxílio de cláusulas hoje conhecidas (por exemplo, $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$), e serve-se delas para definir várias propriedades fundamentais desses conjuntos, como a consistência, a completude e a independência. Mas, a partir de 1930, afasta-se dessa abordagem axiomática, e esforça-se por fundar a noção de consequência numa análise dos conceitos fundamentais da semântica (satisfação, verdade, modelo), chegando assim, em 1936, à noção moderna: uma fórmula A é consequência de um conjunto X de fórmulas se qualquer interpretação que é um modelo de cada fórmula de X for ainda um modelo de A."

[3] Mendelson (1997, p. 11): "The systematic formalization and cataloguing of valid methods of reasoning are a main task of logicians. If the work uses mathematical techniques or if is primarily devoted to the study of mathematical reasoning, then it may be called *mathematical logic*." Shoenfield (1967, p. 1): "Logic is the study of reasoning; and mathematical logic is the study of the type of reasoning done by mathematicians. To discover the proper approach to mathematical logic, we must therefore examine the methods of the mathematician."

tro da tradição teórico-dedutiva, analisando a ideia de demonstração que caracteriza suas investigações, chegando então à concepção que influenciou de maneira relevante a lógica e a matemática, a ideia de uma demonstração formal. Para compreender o desenvolvimento dessa noção, é preciso percorrer as ideias de prova anteriores e como se modifica com o uso de técnicas lógico-formais. Então, para nos aprofundarmos na tradição teórico-dedutivo, começamos pelo trabalho de Frege, que é considerado como agente responsável por caracterizar toda a tradição de estudos lógicos a partir do final do século XIX até os dias de hoje, cuja ideia de prova por meio de uma demonstração mecânica e finitária, caracteriza o processo utilizado por autores posteriores. Então, Frege é o primeiro autor a fornecer um método para se realizar um determinado tipo de prova que, entre outras coisas, deve ser capaz de ser examinado e inteligível, ou seja, que possa ser compreendido de onde advém sua verdade. Portanto, o procedimento deve ser capaz de expressar as conexões lógicas, e assim, para se expressar a prova, é preciso antes ser capaz de expressar relações de consequência e, por essa razão, é que investigaremos as noções de demonstração dos autores que antecedem a Tarski em relação à abordagem em termos formais dedutivos.

Assim como é interessante percorrermos certos desenvolvimentos históricos da noção de demonstração e do método axiomático, é importante também notarmos a relevância do significado do termo 'formal'. Para as investigações que serão feitas a seguir, considera-se *formal* como um termo filosófico-semântico, e nesse sentido, seu significado varia de acordo com o 'objeto' a que se refere. No que diz respeito à lógica, é notável o trabalho de Dutilh–Novaes, que explorou de maneira histórica e filosófica as diversas acepções do termo 'formal' associados principalmente à lógica, apontando suas raízes metafísicas e matemáticas desde Aristóteles até Tarski.[4] Apesar da importância de todas as peculiaridades do termo 'formal' apresentadas por Dutilh–Novaes, para os objetivos desta dissertação, vamos nos ater às nuances do termo apenas quando o seu uso estiver associado aos trabalhos dos autores que aqui citamos. Como já mencionado, o significado do termo formal varia de acordo com o objeto a que se refere, e nesse sentido, se tratando da disciplina lógica, este termo encontra-se intrinsecamente relacionado a lógica de modo que acompanha o desenvolvimento desta disciplina ao longo da história. Sendo assim, é natural que possamos inferir que o sentido de formal influencie e seja influenciado pela disciplina lógica em cada período. Assim, ao observarmos as acepções de formal trabalhadas em autores como Frege, Hilbert e Tarski, esperamos poder qualificar melhor os trabalhos desses autores e, portanto, aprimorar as análises das noções que nos interessam.

Dutilh-Novaes aponta que podemos observar as diversas variações de 'formal' a partir de duas principais perspectivas: 'formal' com alusão às formas e 'formal' como

[4] Dutilh–Novaes (2011).

relativo à regras. Sendo o primeiro grupo subdividido em duas categorias que por sua vez geram cinco outras diversificações. As várias acepções do termo 'formal', nesse sentido, podem se confundir uma vez que determinadas maneiras em que são tomadas podem subentender outras acepções. Por exemplo, noção de formal como indiferente ao particular é uma consequência de um uso esquemático do termo, o qual identifica-se com a ideia de variabilidade, que, por sua vez, remonta a tradição aristotélica da divisão entre matéria forma. Interessa aqui principalmente a tradição de formal como pertencente à forma, e seu uso esquemático, o qual, como procuramos expor a seguir, Tarski mesmo utiliza. Acerca desse sentido esquemático podemos entender que, a partir da aplicação da distinção de forma e matéria, considera-se como forma a configuração da relação de determinada sentença de maneira que a matéria da mesma pode ser substituída por outra matéria, e quando a forma que foi abstraída é preenchida por qualquer outra matéria produzindo uma sentença igualmente verdadeira, considera-se essa forma também como válida. Assim, o sentido da noção formal esquemática, pode ser entendido como quando considera-se que, nesse sentido quando tratamos de 'formal', entende-se que é possível obter um esquema a partir da abstração de um conteúdo de uma sentença. Este esquema opera como uma matriz onde a matéria (o conteúdo) da sentença pode ser substituído por outros de modo que, se essa 'forma' ou esquema for válido, então sempre produzirá sentenças igualmente válidas a partir desse mesmo esquema. Desta forma, podemos observar que no interior da ideia esquemática de formal, estão contidas várias outras noções de formal, as quais podem ser privilegiadas em diferentes autores, mas que parecem pertencer a uma ideia mais geral como a esquemática.

A partir de uma análise da obra de Aristóteles, Dutihl-Novaes aponta que o Estagirita não tratou da distinção de forma e matéria em relação à argumentos ou sentenças lógicas, mas apenas em relação à física. A primeira vez que essa noção esquemática de formal é associada à silogística e, portanto, à lógica, é com Alexandre de Afrodísias, onde considerou as figuras silogísticas como esquemas. Porém, como a autora expõe, a maneira moderna como entendemos esquema, associa-se melhor aos modos silogísticos que às figuras. Isso porque as figuras correspondem às possíveis combinações entre os três termos presentes no silogismo; já os modos, correspondem às configurações obtidas a partir dos quantificadores, negação e cópula. A distinção que nos interessa apontar aqui é em relação aos tipos de entidades que são consideradas substituíveis dentro de tal esquema. Durante todo o período escolástico, segundo Novaes, considera-se que um esquema válido contempla uma variabilidade de *termos* da linguagem. Apenas com Bolzano, no início do século XIX, a partir de uma inspiração matemática, mais especificadamente na álgebra, é que a noção de 'formal' parece relacionar-se com a matemática. Para Bolzano, a partir da sua teoria da derivabilidade, a variabilidade do esquema aplica-se às ideias nelas mesmas.[5] Tal teoria, assemelha-se ao que será desenvolvido anos mais tarde por Tarski com sua teoria da noção de consequência lógica.[6] A grande diferença da teoria de Tarski é justamente a introdução da ideia de *objetos*, e não mais termos, ocuparem a variabilidade do esquema. Em outras palavras, a parte substituível do esquema, ou seja, o que varia em relação a forma lógica (válida) de uma sentença são os objetos sobre os quais ela trata.

Podemos observar, a partir das investigações de Dutilh-Novaes, que Frege faz uso do termo formal como indiferente aos particulares e que, apesar de também entendê-lo como *neutro quanto ao assunto*, não o pensava como uma *abstração completa do conteúdo intencional*, como, por exemplo, a maneira como Kant concebia a lógica. Assim também podemos notar o uso da acepção de Hilbert como *dessemantização*. Assim sendo, podemos observar que Tarski, por primeiramente fazer parte do período onde os estudos formais estavam se desenvolvendo, faz uso das acepções de formal também como dessemantizadas, indiferente aos particulares e no geral, esquemática. Apesar de o trabalho de Tarski sobre consequência lógica de 1936 ser considerado importante para a difusão da noção esquemática de formal e que caracteriza, de certa maneira, a compreensão que temos hoje em dia de lógica formal, podemos notar que já em 1930, nas suas investigações sobre sistemas dedutivos formais, apresenta-se um operador de consequência lógica por meio de axiomas que cumpre um papel esquemático, uma vez que devem servir para uma ampla classe de sistemas dedutivos.

Deste modo, como os trabalhos tarskianos dizem respeito à metateoria aplicada às ciências dos sistemas formais dedutivos, relacionam-se com os então recentes desenvolvimentos dos estudos formais, principalmente no que diz respeito às investigações dos fundamentos da matemática e, portanto, a partir dos desenvolvimentos da teoria da prova. Com o desenvolvimento da lógica matemática, as investigações lógicas adquiriram um novo tratamento, contando, entre outras coisas, com uma linguagem artificial dentro de uma noção de formalização, emergindo a partir disso, uma nova

[5] Dutihl-Novaes (2011, p. 306): "In the early of nineteenth century, the schematic notion of the formal received a sophisticated treatment by means of the notion of variation of ideas-in-themselves introduced by the philosopher, mathematician and priest Bernard Bolzano (see Siebel 2002). Bolzano may have indeed taken inspiration from mathematics, as the general procedure of considering schemata and filling in the 'empty spaces' designated by variables with denoting terms (numbers or letters denoting specific magnitudes) is also at the core of (algebraic) mathematics. Hence, besides the logical influence stemming from the medieval Aristotelian tradition (with which Bolzano was well acquainted), schematic formality may also be rooted in mathematical practice (but so is the formal as indifference to individuals..."

[6] Dutihl-Novaes (2011, p. 306): "The basic idea of the formal as schematic, as we shall see, is the idea of replacing terms with different terms in arguments, i.e. the idea of variability of terms preserving the validity of arguments. For centuries, this was the predominant view of what it means to be formal until, in his 1936/2002 paper, Tarski outlined the limitations of letting variation operate solely on terms. He was concerned, in particular, with the possibility of the language lacking terms for all objects; for this reason, he proposed a reformulation of the notion of the formal as variability, namely that variation should be a procedure concerning objects (objects in the world or mathematical constructions), not terms. This in turn consolidated the notion of the formal as indifference to individuals. I now discuss each of these two variations of the general idea of the formal as (validity-preserving) variability."

noção pela qual poderia-se usar para justificar relações entre proposições mediante um procedimento mecânico, uma *demonstração formal*. Como aponta Blanchette, temos em Gottlob Frege (1848–1925), a partir de um sistema dedutivo formal, uma primeira caracterização da noção de consequência que é formulada em termos de dedutibilidade.[7]

Apesar de Frege ter como objetivo um projeto fundacional da matemática, seus esforços modificaram drasticamente o modo como investigar questões lógicas e matemáticas, dando um importante ponto de partida para a lógica matemática. Assim, pode-se traçar elementos significativos dessas duas abordagens em variados autores, porém, é primeiramente com Frege que a noção de consequência é trabalhada em termos de um sistema dedutivo formal, entendendo assim que o aparato dedutivo do sistema é capaz de representar relações de consequência lógica e, portanto, a noção de consequência lógica.[8]

Posteriormente, Hilbert aprimorou e expandiu o trabalho de Frege elevando o método axiomático a um nível alto, mais geral. Assim, Hilbert buscou com seu projeto metamatemático, axiomatizar as teorias matemáticas, a fim de que se pudesse provar a validade de um conjunto de suas sentenças. Com esse intuito, os métodos convencionais de demonstração se mostravam incapazes dado a natureza infinitária de tais disciplinas matemáticas, em particular, a aritmética e a geometria. Assim como podemos observar em Frege a exigência de um procedimento finitário na demonstração, Hilbert também toma para o seu programa que a demonstração da validade das sentenças matemáticas seja demonstrada por métodos finitários. Como veremos em mais detalhes adiante, essa exigência de Hilbert é uma tentativa, entre outras coisas, de se preservar a teoria cantoriana do infinito na matemática clássica, assim, como aponta da Silva, Hilbert pretendia "lastrear o infinito no finito"[9]. Frente a esse objetivo, Hilbert então sugere que basta uma prova de que os axiomas e regras de inferência da teoria não sejam capazes de produzir ao mesmo tempo uma sentença e sua negação, isto é, deve-se provar a *consistência* do sistema. As estratégias adotadas para perseguir esse objetivo caracterizaram o que entendemos hoje por *teoria da prova*, que pode ser entendida como um dos principais expedientes daqueles que perseguem os objetivos à maneira como foram formulados pelo programa de Hilbert, caracterizando, essencialmente, também os estudos metamatemáticos no começo do século XX.

A partir disso, apresentamos os aspectos desses desenvolvimentos de tais autores, de modo que possamos encontrar elementos decisivos e que ilustrem, grosso modo, o panorama do debate acerca da noção de consequência, dos quais consideraremos aqui,

[7] Blanchette (2001, p. 116).

[8] É possível apontar para uma teoria da demonstração desde Aristóteles. Porém, o modo mais semelhante aos estudos modernos de lógica pode ser encontrado em um teoria da demonstração em Bernard Bolzano (1781–1848), como aponta Bocheński (1985, p. 295).

[9] da Silva (2007, p. 201). Ver também Blanché (1996, p. 365–370); Kneale & Kneale (1980, p. 689–695) e Bocheński (1985, p. 299–301).

apenas o contraste dos níveis em que a discussão é empregada. Os sistemas formais dedutivos no estilo 'Frege-Hilbert', como são conhecidos hoje em dia, apresentam uma forma similar de trabalhar a noção de consequência lógica, caracterizada dentro da noção de prova desses autores, e apresentada como uma *relação*. Assim, a partir dessa perspectiva, uma conclusão é consequência das premissas, se há uma relação entre os conjuntos de premissas e conclusão, garantida por regras de inferência, que representam as regras lógicas como, por exemplo, *modus ponens*. Dentro dessa abordagem a noção de consequência coincide com uma noção de *derivabilidade* a partir das regras de inferência.

Podemos então, observar a noção de consequência lógica trabalhada dentro dos estudos metamatemáticos, que tiveram como origem os estudos fundacionais da matemática e o surgimento das ferramentas formais de análise. Desse modo, observamos o tratamento dessa noção, em níveis distintos por Frege e Hilbert, cada qual com os seus objetivos. Frege pretende atingir um grau maior de precisão e análise com o seu sistema formal. Hilbert pretende a partir da formalização de toda teoria matemática, analisar suas características formais comuns, e então estipular axiomas para tais formalismos. Dentro desses estudos vemos a noção de consequência ser trabalhada dentro da noção do que é ser uma prova nos trabalhos desses autores. Os trabalhos de Tarski pretendem empreender um avanço maior na generalidade das investigações metamatemáticas. Em um primeiro texto do gênero, Tarski apresenta características e propriedades gerais dos sistemas dedutivos e, mais tarde, analisa um sistema dedutivo geral, mas com algumas restrições. Nesses textos, Tarski apresenta de uma forma axiomática a noção do que significa, dentro de um sistema formal dedutivo, uma sentença ser consequência de um conjunto de sentenças. Ao fornecer essa noção por meio de axiomas, Tarski estipula características específicas que a relação de consequência deve satisfazer, e que são representadas por um operador $Cn(X)$. Um operador de consequência, é uma noção importante dentro de qualquer sistema formal dedutivo, representando a natureza de tais sistemas, na medida em que expressa a ação de dedutibilidade, derivação ou o que significa consequência lógica nesses contextos.

Acerca das caracterizações da noção de consequência encontradas em Frege e Hilbert, em relação à teoria de Tarski de 1930, podemos apontar uma aproximação maior com o último. Isto se deve principalmente pela diferença do nível empregado por esses autores no tratamento dessas noções. Como apresentamos a seguir, os trabalhos de Tarski sobre a noção de consequência não são apenas formulações metamatemáticas, mas são apresentações metodológicas em relação à construção de teorias dedutivas formais. Assim, a relação da teoria de 1930 de Tarski com a abordagem teórico-dedutiva, presente em níveis diferentes, nas obras de Frege e Hilbert, se dá na medida em que tais teorias recaem no escopo da caracterização de consequência representada pelo operador de consequência tarskiano. Ou seja, com o objetivo de contrastar, tomamos

Frege e Hilbert como representantes de um certo tipo de tratamento onde a noção de consequência é trabalhada, cada qual, em níveis distintos, e que, apesar disso, encontram-se relacionadas à abordagem que se usa denominar "teoria da prova". As conexões com o trabalhos de 1930 com a abordagem da teoria da prova, ocorrem então, na generalidade metodológica do trabalho de Tarski onde o escopo engloba os níveis trabalhados por Frege e Hilbert. Assim, observar os níveis dessas caracterizações é um dos objetivos perseguidos ao longo da dissertação.

Em relação ao artigo de 1936, intitulado originalmente em polonês "O pojciu wynikania logicz-nego" [Sobre o conceito de consequência lógica][10], Tarski apresenta uma teoria geral da noção de consequência lógica que, como bem o autor inicia o artigo, pretende caracterizar a noção de consequência lógica "usual", a qual os matemáticos e lógicos achavam que tinham esgotado por meio dos desenvolvimentos formais. Assim, Tarski, após expor um exemplo de raciocínio onde é possível observar uma falha (devido às limitações comuns impostas por uma típica sistematização formal) em representar aquilo que parece ser uma consequência lógica legítima, sugere que se usem noções semânticas para adequar assim tal noção de consequência lógica à noção comum da mesma. Em relação a uma caracterização semântica, podemos apontar, mesmo que com ressalvas, como Bolzano sendo um dos primeiros autores com essa abordagem a qual, como veremos, a definição proposta por Tarski em 1936, se assemelha em parte. Não é claro se Tarski tinha em mente, em 1930, a problemática exposta em 1936, ou se há uma ruptura clara entre essas duas caracterizações. No entanto, atualmente, é certo que um sistema lógico teoricamente bem construído apresenta duas caracterizações distintas que se complementam: correção e completude. Dizemos que um sistema é correto se, por meio de seus axiomas e regras de inferência não é possível, em qualquer interpretação, deduzir a partir de premissas verdadeiras, conclusões falsas. Por completude, entende-se como o caso em que toda sentença verdadeira do sistema possa ser obtida pelas regras de inferência e axiomas, ou seja, todo modelo válido do sistema é dele dedutível sintaticamente.

A respeito das influências dos trabalhos tarskianos nos dias atuais, há considerável bibliografia dedicada a discutir os méritos e as falhas dessas teorias, principalmente sobre a teoria da verdade e a consequência lógica. O presente trabalho busca apenas situar as contribuições de Tarski dentro de um panorama histórico a respeito dos desenvolvimentos da lógica e da matemática de sua época, assim como, relacionar tais trabalhos a tradicionais abordagens da noção de consequência lógica, comuns no então cenário intelectual dessas investigações. De fato, há um conjunto numeroso de diversas questões que são pertinentes para as teorias que se propõem a tais questões, e a maneira como pretendemos percorrer tal panorama será observando aspectos importantes

[10] TARSKI (1936 [2007])

das abordagens históricas citadas anteriormente, de modo que possamos identificar e correlacionar os trabalhos de Tarski sobre consequência.

Com esse objetivo geral em mente, podemos visualizar um esquema geral das análises por meio das categorias de abordagens técnicas e pré-teóricas Assim, observaremos as investigações dos trabalhos de Tarski sobre a noção de consequência pela seguinte estratégia: é possível observar que a noção de consequência tem sido desenvolvida por duas abordagens, (I) teoria da prova e (II) teoria de modelos. Dentro dessas duas concepções de consequência, é possível ainda identificar duas maneiras pré-teóricas de se conceber a noção de consequência lógica, denominadas por Asmus e Restall (2012) respectivamente por (III) abordagem por transferência e (IV) abordagem por propriedades.[11] Assim, apesar de ser possível certo hibridismo dessas abordagens, como Asmus e Restall obeservam, interpretamos aqui como relacionadas, as abordagens (I) e (III), (II) e (IV). Ou seja, a abordagem (I) pressupõem uma pré-teoria de consequência lógica como a da (III), assim como a abordagem de modelos (II) parece perseguir a pressuposição como em (IV).

Nesse sentido, parece-nos plausível pelo menos situar os trabalhos de Tarski enquanto contribuição para o desenvolvimento rigoroso de noções de consequência que, apesar de distintas, à luz das noções de correção e completude, apresentam-se como complementares se se quer construir um sistema lógico de modo apropriado. Ou seja, consideraremos os artigos de 1930 e 1936 como contribuições ao desenvolvimento de dois aspectos distintos, porém complementares da teoria lógica, o primeiro relacionado à parte dita sintática e formal, no caso num âmbito geral de disciplinas dedutivas; e o segundo relacionado ao desenvolvimento dos estudos semânticos da década de 1930 e o posterior desenvolvimento da teoria de modelos. Assim, a fim de analisarmos os conteúdos dos artigos de 1930 e 1936, sob a perspectiva acima esboçada, organizamos o trabalho da seguinte forma.

No Capítulo 1, *Alfred Tarski: contexto, formação e contribuições*, apresentamos um panorama da vida e trajetória intelectual de Alfred Tarski. A partir de trabalhos

[11] Asmus & Restall (2012, p. 13). Os autores destacam duas principais abordagens para responder a questão "qual conexão deve haver entre a conclusão e as premissas para a conclusão ser considerada como consequência das premissas": "In the first approach, the conclusion is a consequence of the premises if and only if, whenever the premises have some specified property, so does the conclusion. This approach focusses on whether the premises and conclusion have the designated property or not, it doesn't rely on a strong connection between premises and conclusion. In the paradigmatic example, this property is truth. The second approach is more concerned with the relation between the premises and conclusion. The consequence relation is build on top of another relation between premises and conclusions. If the premises and conclusion of an argument are connected by any number of steps by the basic relation, then the conclusion is a consequence of the premises. Paradigmatic examples are based on proof theories. We will refer to the first type of approaches as property based approaches, and the second as transference based approaches. There are many hybrids of the two approaches. A truth preservation approach sounds like a property based approach, but this depends on what we make of preservation. If it is important that the truth of the conclusion is connected via a processes of transference to the truth of the premises, then the approach has both property and transference features."

biográficos como o dos Fefermans, Givant, McFarlands & Smith e Patterson, buscamos percorrer aspectos importantes que de maneira direta ou indireta, dizem respeito aos trabalhos de Tarski aqui estudados. Tais obras biográficas, por terem como protagonista nosso autor, acabaram por capturar certo registro importante de um período recente da história da lógica. Levando-se em conta que diversas ações além da academia, como questões geográficas, político-administrativas, conflitos externos, influenciam a prática e o ensino de qualquer área, é interessante notar certos acontecimentos envolvendo essa dinâmica em relação as questões aqui trabalhadas. Podemos notar fatores que propiciaram a formação de um centro de investigações em lógica, matemática e estudos formais que exerceu bastante influência no começo do século XX. Para nós é interessante observarmos circunstâncias que introduziram certa abordagem lógico-filosófica a partir da qual, de maneira direta ou indireta, contribuiram para a maneira que as investigações foram desenvolvidas.

O Capítulo 2, *Abordagem teórico-dedutiva e o operador de consequência*, pode ser dividido em dois momentos, onde primeiramente, para observarmos o grau de generalidade envolvido na teoria de Tarski, buscamos aprimorar nosso percurso até as ideias do autor por meio de uma apresentação histórica do desenvolvimento de sua perspectiva sobre as investigações metamatemáticas. Isso faz com que se entre em questões históricas do desenvolvimento da própria matemática. Após essa contextualização, lançamos nosso olhar para os aspectos das teorias dos autores como Frege e Hilbert que nos fornece algum entendimento sobre a noção de consequência ali trabalhadas. Assim, para podemos analisar a noção de consequência lógica presente nos trabalhos que antecedem a Tarski, voltaremos-nos à noção de prova apresentada por esses autores. Com isso, esperamos evidenciar peculiaridades como por exemplo, a acepção do termo 'formal' e noção pré-teórica praticada em cada autor. Com esse objetivo, elencamos alguns aspectos que assim se assemelham, nos trabalhos de Frege e Hilbert, os quais caracterizam substancialmente a abordagem da noção de consequência, tanto em termos dedutivos (em termos de teoria da prova), sendo o primeiro apresentado a partir de uma construção formal interpretada, e o segundo, mais geral, a partir da abstração do conteúdo da formalização, ou seja, não interpretada e, portanto, metamatemática. Um fator interessante a se ressaltar é o modo característico com que a noção de consequência é apresentada pelos autores citados, definida em termos de uma *relação* entre conjuntos. Neste sentido, Tarski, ao tratar da noção de consequência num âmbito mais geral, apesar de introduzir seu operador de consequência também em termos de relação, torna a noção de consequência mais precisa dentro de um sistema formal dedutivo, ao fornecer características específicas, antes não destacadas pelos seus antecessores.[12] Assim, no segundo momento apresentamos a formulação do operador

[12]Tarski (1930a e 1930b) e Beziau (2005).

de consequência tarskiano, $Cn(X)$. Esperamos, com isso, tornar claro os níveis distintos em que Frege, Hilbert e Tarski abordam a noção de consequência, bem como a noção pré-teórica majoritariamente praticada pela tradição teórico-dedutiva.

No Capítulo 3, *A noção de consequência lógica em termos de modelo*, apresentamos a noção de consequência lógica introduzida em 1936, quando analisamos os argumentos de Tarski que apontam a falha da caracterização puramente sintática em representar a noção de consequência lógica e os argumentos para sua própria definição.[13] É interessante notar as dificuldades que a abordagem puramente sintática encontra em representar, segundo Tarski, a noção *usual* de consequência lógica. As estratégias da teoria tarskiana, de um modo geral, consistem na introdução de elementos semânticos técnicos nas análises dos estudos formais. Muitos desses elementos, como as noções de satisfação e interpretação, já podem ser observados em sua monografia sobre o conceito de verdade de 1933.[14] Esperamos observar, dessa forma, os fundamentos semânticos que contribuíram para o desenvolvimento inicial da teoria de modelos.

Por fim, no Capítulo 4, *Considerações históricas: antes e depois de 1936*, pretendemos expor alguns pontos gerais que antecedem a teoria sobre consequência lógica de 1936 de Tarski e como sua teoria pode ser relacionada com a teoria atual de modelos. Tem sido comum atribuir à teoria de Bolzano sobre derivabilidade como tendo antecipado muitas das estratégias utilizadas por Tarski, como por exemplo, pensar a variabilidade de um esquema formal na formulação da noção de consequência (derivabilidade). Nossa intenção é enumerar alguns trechos da obra de Bolzano que exprimem ideias similares e que, apesar disso, diferem da teoria tarskiana. Em uma perspectiva posterior ao artigo de 1936, abordamos alguns pontos da análise de Etchemendy, a partir dos quais o autor argumenta contra a ideia de que os trabalhos de Tarski antecipam a moderna teoria de modelos.[15]

[13] Tarski (1936 [2007]).
[14] Tarski (1933).
[15] Etchemendy (1988 e 1990).

Capítulo 1

Alfred Tarski: contexto, formação e contribuições

Importantes fatores e eventos perpassam a trajetória de um dos mais influentes lógicos do século XX. A Polônia, sua terra natal, atravessou diversos e variados conflitos que marcaram para o bem e para o mal, substantivamente, o ambiente anterior e durante o período em que o jovem Alfred floresceu.[1] Alfred Tarski nasceu em 14 de janeiro de 1901[2], em Varsóvia, batizado com o sobrenome Taitelbaum, de origem judaica, o qual modificou posteriormente, em 1924, para 'Tarski', quando se converteu ao catolicismo.[3] Seu pai, Ignacy Taitelbaum (1869–1942) de Varsóvia, exercia atividade econômica variada, tendo se concentrado mais no ramo madeireiro. Sua mãe, Róza Prussak (1879–1942), de Łódz, era neta de Abraham Mojźesz Prussak, dono de uma das primeiras fábricas de lã da cidade, tendo sua família feito fortuna na indústria têxtil. Ignacy e Róza casaram-se em 16 de janeiro de 1900 e tiveram dois filhos, Alfred e Wacław.[4] Em 1910, Alfred foi matriculado no *State Gimnazjum 4 em Varsóvia* e lá permaneceu até o verão de 1915, quando transferiu-se para o *Mazowieckie Gimnazjum*, ano em que os alemães ocuparam Varsóvia e realizaram diversas mudanças, inclusive a reabertura da Universidade de Varsóvia, que havia sido fechada e transferida para a Rússia com o início da Primeira Guerra Mundial em 1914.[5]

Alfred ingressa na Universidade de Varsóvia, em 1918, período em que a mesma vivia um momento de reflorescimento desde sua reabertura em 1915, principalmente nas áreas em que Alfred veio a desenvolver muitos de seus trabalhos. Há muito o

[1] Desde 1772 o território polonês era dividido entre três nações: o Reino da Prússia ao oeste, o Império Russo ao leste e a Áustria ao sul.

[2] Há divergências em relação ao ano exato devido às diferenças entre os calendários gregoriano e juliano, este último utilizado nos países eslavos em razão da prevalência da Igreja Ortodoxa.

[3] Tradução polonesa do nome.

[4] Feferman & Feferman (2004, p. 5). Para um maior detalhamento desse período da vida de Tarski e sua relação com a família, recomenda-se a leitura de Feferman & Feferman (2004, capítulo 1, p. 5–19).

[5] McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 3).

que destacar sobre a Universidade de Varsóvia, mas gostaríamos de ressaltar aqui, principalmente, a relevância da interação feita com a Universidade de Lwów e o que ficaria conhecido, mais tarde como Escola Lwów-Varsóvia, cuja abordagem teve grande influência para os estudos de lógica e métodos formais na Polônia, principalmente no início do século XX.[6]

Podemos apontar alguns fatores que contribuíram para a formação de um ambiente bastante fértil, que antecede a Tarski, principalmente na área de matemática e lógica matemática, e que proporcionou a formação do que alguns autores denominam Escola Lwów-Varsóvia. Começando com a Universidade de Lwów, de acordo com Woleński, uma grande influência credita-se à vinda de Kazimierz Twardowski (1866–1938) de Viena para Lwów, o qual é apontado como o principal difusor dos recentes avanços em lógica à época.[7] Twardowski pertenceu ao último grupo de alunos de Franz Brentano (1838–1917) e deu continuidade ao espírito filosófico de seu mestre quando tornou-se professor na Universidade de Lwów em 1895, inaugurando seminários de lógica nos quais importantes professores de Tarski, como Jan Łukasiewicz (1878–1956) e Stanisław Leśniewski (1886–1939) participaram.[8] O fomento dos estudos lógicos, metafísicos e ontológicos marcados pela crise dos fundamentos da matemática na passagem do século XIX ao XX, segundo Gomes & D'Ottaviano, combina-se à retomada de elementos oriundos do legado aristotélico que se arranja ao frutífero ambiente acadêmico de Praga, Viena, Graz e Lwów. Apesar da diversidade de interesses dos seus participantes, destacam os estudiosos, uma postura em comum em relação à abordagem dos problemas sobressai, caracterizada pela busca por rigor e precisão nos trabalhos teóricos que se torna notável nos desenvolvimentos subsequentes.[9]

[6]Woleński (2019, n. p.): "The development of logic in Warsaw had two subperiods in 1918–1939, namely 1918–1929 and 1929–1939. The first decade consisted in intensive teaching and scientific work at the seminars of Leśniewski and Łukasiewicz. Not many results were published at that time. The explosion of publications took place in 1929 and later. There are several factors which caused the development of mathematical logic in Poland. The Warsaw school of logic appears to be model case, but the power of this circle influenced other places where the general environment was not so favourable to logic. The fruitful co-operation of mathematicians and philosophers in Warszawa had the utmost significance. The founders of the Polish mathematical school made a brave experiment consisting in inviting two philosophers with a modest mathematical background as professors at the Faculty of Mathematics and Natural Sciences; this did not happen in any other country."

[7]Woleński (2019, n. p.).

[8]Woleński (2004, p. 400): "He wanted to introduce Brentano's metaphilosophical program in Poland. In particular, he demanded clarity of language and thought and believed in scientific philosophy. Twardowski was also the first person who gave a course in mathematical logic in Poland (1899/1900; it concerned the algebra of logic and was quite elementary." Ainda, segundo o historiador, Woleński (2019, n. p.), Twardowski foi responsável por propagar uma postura que prezava por clareza na investigação filosófica, "He propagated a clear style of writing and speaking about philosophical matters, insisted upon justification of philosophical theses and sharply distinguished philosophy as a science from world-views."

[9]Gomes & D'Ottaviano (2017, p. 297): "Esse ambiente constitui-se *alma mater* de diversos estudiosos importantes para a lógica dos séculos XIX e XX, dentro eles Benhard Bolzano (1781–1848), Franz Brentano (1838–1917), Aleixus Meinong (1853–1920), Kazimierz Twardowski (1866–1938), Jan Łukasiewicz (1878–1956) e Alfred Tarski (1901–1983). Jan Łukasiewicz e seu professor Kazimeirz Twardowswki fo-

Com a reabertura da Universidade de Varsóvia em 1915, a maioria do corpo docente veio de Lwów. Também naquele ano, Łukasiewicz se torna professor de filosofia em Varsóvia. Łukasiewicz publicou diversos trabalhos importantes em lógica e filosofia da lógica que influenciaram o tratamento e os desenvolvimentos desses assuntos. Em sua célebre monografia de 1910, *O princípio da contradição em Aristóteles*, Łukasiewicz analisa aspectos lógico-filosóficos da noção de contradição relacionados à ontologia e à lógica aristotélicas, confrontando-as à lógica proposicional clássica, da qual há um apêndice ao final da monografia que chegou a ser utilizado na Polônia, por um certo tempo, como livro-texto.[10] Entre 1916 e 1918, Łukasiewicz desenvolve a ideia de uma lógica heterodoxa em relação ao aspecto bivalente da lógica aristotélica (como se chamava à época a lógica clássica). A lógica trivalente, como ficou conhecida, abriu caminho para a elaboração posterior de sistemas lógicos heterodoxos denominados não clássicos.[11] Em 1924, Łukasiewicz introduz uma notação lógica que ficaria conhecida como "notação polonesa", e em 1929, ele publica livros introdutórios de lógica que seriam amplamente utilizados no ensino desses tópicos em cursos universitários poloneses da época. Além dos seus trabalhos acadêmicos, Łukasiewicz também atuou como chefe da divisão do ensino superior no Ministério das Denominações Religiosas e Educação Pública quando Pareweski assimiu a chefia de Estado na Polônia.[12]

Em 1919, depois de trabalhar com Łukasiewicz no Ministério da Educação, Leśniewski é apontado como chefe do Departamento de Filosofia da Matemática na Faculdade de Ciências Naturais na Universidade de Varsóvia. Leśniewski ficou conhecido pela precisão de seus trabalhos nos quais desenvolveu uma análise lógica da linguagem, empregando categorias semânticas como a distinção entre linguagem e metalinguagem.

Em 1918, com a independência da Polônia, de acordo com Feferman & Feferman, seguiu-se grande efervescência intelectual que resultou em um ambiente bastante fértil para os desenvolvimentos de inúmeros trabalhos, principalmente no campo da lógica e

ram os principais promotores teóricos da Escola de Lwów-Varsóvia, ambiente no qual outro autores também fizeram boa filosofia. Todavia, o que une os membros da Escola de Lwów-Varsóvia é o filosofar desprentensioso, que prima pela formulação clara e desambiguada dos problemas: sua unidade não era doutrinal, mas de abordagem."

[10] Łukasiewicz

[11] Feferman & Feferman (2004, p. 34): "Some regarded Łukasiewicz discovery of this so-called non-Aristotelian logic as comparable in importance to the discovery of non-Euclidean geometry in the nineteenth century."

[12] Woleński (2004, p. 401): "Warszawa appeared on the stage exactly in 1915. The German army very soon took the city in Word War I. The German authorities agreed to reopen the (Polish) University of Warsaw in 1915; it was closed in 1831 and functioned in 1862–1869 as the Warsaw Main School. The academic staff was mainly imported from Łvov. Łukasiewicz was appointed professor of philosophy." McFarland, McFarland & Smith (2017, p. 4) destacam o crescimento da universidade nesse período: "The new Polish faculty were assembled from various institutes in Warsaw, from universities in the other partitions of Poland, and from exile abroad. The university expanded rapidly during the war years, from one thousand to more than four thousand students. Most belonged to the urban middle or upper class, from central Poland; about 75% had to work to offset expenses. About 65% were male; and about 25%, Jewish."

da matemática.[13] O contexto em que se desenvolveram importantes trabalhos em lógica e matemática nesse período foi favorecido por um programa de pesquisa idealizado por Zygmununt Janiszewski (1888–1920) que definiu uma agenda em que os matemáticos poloneses, agora em um país independente, deveriam se concentrar.[14] Tal programa privilegiava áreas como teoria de conjuntos, topologia e lógica por desempenharem um papel fundamental em matemática.[15] Janiszewski também foi responsável por idealizar a revista acadêmica *Fundamenta Mathematicae* lançada em 1920, que permitiu uma ampla divulgação dos trabalhos poloneses e o intercâmbio com a comunidade acadêmica internacional, ultrapassando as barreiras linguísticas. Tanto acadêmicos de Lwów quanto de Varsóvia puderam divulgar seus trabalhos para a comunidade acadêmica internacional, o que colocou a Polônia em posição de destaque no debate da época, principalmente em relação aos assuntos ja mencionados. Nesse sentido, Lwów e Varsóvia emergem como importantes polos de atividade matemática na Polônia. De acordo com Woleński,

> Dois centros expressivos da escola polonesa de matemática surgem na Polônia, em Varsóvia e em Łwów. Kraków permaneceu mais tradicional no espírito de Zaremba. Sierpiński, Janiszewski e Stefan Mazurkiewicz (1888–1945) desempenharam um papel importante em Varsóvia, enquanto Stefan Banach (1892–1945) e Hugo Steinhaus (1887–1972) lideraram em Łwów. Ainda uma importante diferença entre os dois centros de matemática moderna na Polônia deve ser notada. Embora os matemáticos em Lwów trabalhassem principalmente na aplicação da teoria de conjuntos e topologia, o círculo em Varsóvia focava mais em assuntos abstratos.[16]

Em 1918, um pouco menos de um mês antes do término da Primeira Guerra Mundial que culminaria na independência da Polônia, Alfred se matricula na Universidade

[13]Feferman & Feferman (2004, p. 26–30).

[14]Woleński (2004, p. 401): "Poland recovered its independence in 1918. This also resulted in a great debate about the tasks and prospects of Polish science and culture. Scholars in every field discussed how to develop their disciplines and what to do in order to catch up with world science. Particularly important was the discussion was amoung mathematicians. In fact, it already started in Lvov, but it was rather private involving Sierpiński and Zygmunt Janiszewski (1888–1920)."

[15]Woleński (2004, p. 401): "Janiszewski's program attributed a great role to mathematical logic and the foundations of mathematics. Janiszewski himself wrote a few general papers on logical and foundational matters in 1915-1916. Perhaps the most interesting is his paper 'logistics', where he considered mathematical logic as an autonomous branch of mathematics, having its own problems and not dependent on its applications in mathematics or on other practical functions."

[16]Woleński (2004, p. 402): Nossa tradução. No original lê-se: "Two signigicant centres of the Polish mathematical school arose in Poland, namely in Warszawa and in Lvov. Krakow remained more traditional in the spirit of Zaremba. Sierpiński, Janiszewski and Stefan Mazurkiewicz (1888–1945) played the main role in Warszawa, while Stefan Banach (1892–1945) and Hugo Steinhaus (1887–1972) became the leaders in Lvov. Yet one important difference between the two centres of modern mathematics in Poland must be noted. Although mathematicians in Lvov worked mainly on applications of set theory and topology, the circle in Warszawa focused more on abstract matters."

de Varsóvia. Inicialmente com o interesse em estudar biologia, porém com o fechamento da universidade entre 1918 e 1919, por conta do conflito com os germânicos ao oeste, não chegou a cursar as matérias, mudando em seguida para o curso matemática. Até este período, a Universidade de Varsóvia ja contava com um corpo docente sólido engajado no programa de Janiszewski dos quais destacamos os professores que ministraram aulas de que Tarski participou. Entre 1918 e 1919, como explicam Feferman & Feferman, o pequeno número de alunos interessados em matemática e lógica favoreceu certa relação de proximidade com os professores que, nesse momento, começam a adquirir destaque internacional.[17] No curso de matemática, foram seus professores: Zygmunt Janiszewski, em geometria analítica, Stefan Mazurkiewicz (1888–1945), em cálculo diferencial e análise superior, Waclaw Sierpiński (1882–1969), em teoria de conjuntos e teoria da medida, e Kazimierz Kuratowski (1896–1980), em topologia, teoria de conjuntos e fundamentos da matemática.

Os cursos em que Tarski estudou lógica foram todos ministrados por professores com formação filosófica. Lógica e seminários com Łukasiewicz, fundamentos da aritmética, geometria e lógica com Leśniewski, e lógica elementar e filosofia com Tadeuz Kotarbińinski (1886–1981).[18]

A partir desses cursos, segundo McFarland, McFarland & Smith, é possível observar os campos de pesquisa em que Tarski se concentrará em sua carreira,

> É possível distinguir três temas que emergem dos estudos de Tarski durante seus dois primeiros anos na universidade: lógica, teoria dos conjuntos e teoria da medida. Esses estudos se estenderiam em sua carreira de pesquisa. Repetidamente durante 1920–1924, Alfred participou em seminários de Kotarbiński, Leśniewski e Łukasiewicz. Esses professores compartilhavam um plano de fundo similar: eles foram todos estudantes de Kazimierz Twardowski, fundador do famosa Escola Lwów-Warsaw de lógica.[19]

Com base no panorama descrito resumidamente acima, constatamos que Tarski se destacou durante sua carreira como um importante representante dos principais as-

[17] Feferman & Feferman (2004, p. 29–28): "From enrollment figures for the University of Warsaw in 1918/20, one can estimate that there were at most twenty-five or thirty students in mathematics, all told. Thus, a student in mathematics could expect to benefit from individual attention from top researchers in the field."

[18] Feferman & Feferman (2004, p. 41): "Though they were no longer philosophers in the traditional sense, neither could they be counted as mathematicians; they devoted themselves totally to logic and the foundations of mathematics. They also continued to have good working relations with the mainline philosophers-especially, Kotarbiński, with whom they traded students."

[19] McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 12). Nossa tradução. No original lê-se: "It is possible to discern three intellectual threads emerging from Alfred's studies during his first two years at the university: logic, set theory, and measure theory. They would extend far into his research career. Repeatedly during 1920–1924, Alfred participated in the seminars of Kotarbiski, Leśniewski, and Łukasiewicz. These professors shared a similar background: they were all students of Kazimierz Twardowski, the founder of the famed Lwów–Warsaw school of logic."

pectos que fez notável o círculo acadêmico de que fez parte. Como destacam Feferman & Feferman em relação a influência de Łukasiewicz e Leśniewski na formação do jovem Alfred,

> Até então, os professores "L" o marcaram indelevelmente com uma interminável preocupação por clareza, precisão e rigor, fornecendo o terreno para sua visão fundamental da lógica como um pilar essencial para a metodologia das ciências dedutivas e ainda, mais amplamente, para as ciências em geral.[20]

Na intenção de ilustrarmos adequadamente a importância de Tarski nos campos de pesquisa em que se dedicou, destacamos a seguir algumas publicações a fim de exemplificar a diversidade de assuntos em que nosso autor trabalhou, tendo por critério, os artigos mais influentes publicados em importantes períodos de sua trajetória.

Desde os anos iniciais de estudo no *State Gimnazjum 4* em Varsóvia, Alfred, sempre se mostrou um aluno promissor. Ainda enquanto estudante na Universidade de Varsóvia, por volta de 1920, na intenção de se estabilizar financeiramente, ministrou aulas de geometria em uma escola preparatória para jovens mulheres, dedicada ao magistério, onde lecionou durante dois anos até ser dispensado por motivos antissemitas, como alguns biógrafos indicam. De 1922 até 1925, a partir de uma nova diretriz educacional da Polônia, que permitia a contratação de professores mediante apenas uma prova oral ou escrita, ministrou aulas no Instituto Pedagógico.[21]

O período inicial em que Tarski lecionou para professores secundaristas foi de grande importância para sua carreira de pesquisa. Nesse momento em que atuou no treinamento de professores, havia o intuito de reestruturar a maneira como o ensino de disciplinas matemáticas eram realizados na Polônia. Como apontam McFarland, McFarland & Smith, Tarski engajou-se nesse projeto que, por sua vez, contribuiu para seus interesses de pesquisa, ocorrendo uma interação valiosa entre o ensino de matemática, geometria e a pesquisa dos fundamentos dessas disciplinas.[22] A partir de um relato

[20] Feferman & Feferman (2004, p. 41). Nossa tradução. Lê-se no original: "Even so, the Professors 'L' had stamped him indelibly with an unending concern for clarity, precision and rigor, provinding the ground for his fundamental view of logic as the essential cornerstone for the methodology of the deductive sciences and, even more widely, for the sciences in general."

[21] McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 36–38) Indicam uma divergência em relação aos detalhes apresentados por biógrafos como Feferman & Feferman (2004) e Givant (1999) a respeito dos anos e nomes dos colégios onde Tarski lecionou. Para mais detalhes, confira Feferman & Feferman (2004, p. 54) e Givant (1999, p. 50).

[22] McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 184): "To prepare students for participation in a rapidly evolving society, teachers should not merely present their subjects as they were themselves taught. In 1914, Stefan Kwietniewski and Wadysaw Wojtowicz emphasized application of that principle to the teaching of mathematics in Poland:

> One of the most outstanding attributes of modern mathematics is the work in elucidating its foundations [...] These results [...] are so momentous that they must exert a profound

trazido pelos biógrafos Feferman & Feferman, de um aluno de Tarski nesse período, sugere-se uma imagem do jovem professor Tarski, que nas palavras de Karol Martel,

> Havia algo muito especial em seu papel como um professor do ginásio. Mais tarde entendi que era a elegância de seu argumento; a consistência lógica de suas palestras; mesmo como um professor ginasial, ele era de fato um palestrante acadêmico. Mais impressionante é a imagem que tenho de Tarski em nossa sala de aula no quadro negro, nos ensinando geometria: primeiro, a declaração do teorema e então o procedimento passo a passo com sua prova. Ele sempre terminava a demonstração com uma sigla *c. b. d. d.* (uma abreviação em polonês de "O qual foi demonstrado") ou em latim *q. e. d. quod erat demonstrandum*. Essa maneira puramente lógica de ensinar era totalmente desconhecida para nós, provavelmente não eramos maduros o suficiente para entendê-la, mas isso foi, de fato, nosso primeiro encontro com os princípios do pensamento científico nas ciências dedutivas.[23]

Do período em que Tarski começa a ministrar aulas e publicar os resultados de suas pesquisas, até o momento que deixa a Polônia, em 1939, destacamos algumas publicações de maneira cronológica, seguida de alguns comentários sobre outros aspectos da vida do autor. A primeira publicação de Tarski ocorre ainda enquanto estudante na Universidade de Varsóvia, em 1921, entitulada "Przyczynek do aksjomatyki zbioru dobrze uporzadkowanego" [Uma contribuição à axiomática dos conjuntos bem-ordenados] na revista *Przeglad Filozoficzny* [Revista Filosófica] com o sobrenome Tajtelbaum.[24]

Em 1923, a partir da sua pesquisa de doutorado, orientado por Leśniewski, publicou o artigo entitulado "O wyrazie pierwotnym logistyki" [Sobre o termo primitivo

> influence on the exposition of the whole of mathematics, from the lowest to the highest levels of teaching. Today teacher[s] may no longer take the precritical position, *allez en avant et la foi vous viendra*. [They] must not only thoroughly understand the newest research in the foundations of mathematics, but also restructure their lessons from the ground up, in order to make them most straightforward and in accordance with modern science. This reconciliation ... can only be established through many trials and the concerted efforts of a whole multitude of people—scholars as well as educators."

[23] FEFERMAN & FEFERMAN (2004, p. 56). Nossa tradução. Lê-se no original: "There was something very special in his role as a gymnasium teacher. Later on I understood that it was the elegance of his argument; the logical consistency of his lecturing; even as a schoolteacher, he was in fact an academic lecturer. Most impressive is the image I have of Tarski in our classroom at the blackboard, teaching us geometry: first, the statement of the theorem and then proceeding step by step with its proof. He always ended the demonstration with the formal *c. b. d. d.* (the abbreviation in Polish of 'which was to be proved') or the Latin *q. e. d.* (quod erat demonstrandum). This purely logical way of teaching was totally unknown to us pupils–we were probably not mature enough to understand it–but it was in fact our first meeting with the principles of scientific thinking in deductive sciences."

[24] TAJTELBAUM [TARSKI], 1921.

da logística] na *Przeglad Filozoficzny* e também em uma tradução francesa na revista *Fundamenta Mathematicae*.[25]

Em 1924, Alfred obtém seu doutoramento em matemática, converte-se ao cristianismo e muda seu sobrenome para Tarski. Ainda no mesmo ano, publicou artigos em três seguimentos. Em lógica e teoria de conjuntos, publicou em francês os trabalhos intitulados respectivamente, "Sur les truth-functions au sens de M M. Russell et Whitehead" [Sobre as funções de verdade na acepção de Russell e Whitehead]; "Sur les ensemble finis" [Sobre conjuntos finitos] e "Sur quelques théorèmes qui èquivalent à l'axiome du choix" [Sobre alguns teoremas que são equivalentes ao axioma da escolha]. Os dois primeiros foram publicados na *Fundamenta Mathematicae* e o último na *Fundamenta Matematyczno-fizyczny*. Em geometria, "O równoważności eiwlokatów" [Sobre a equivalência dos polígonos] e "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes" [Sobre a decomposição de conjuntos em partes respectivamente congruentes] o qual escreveu junto com Stefan Banach (1892–1945) e que deu origem ao que ficou conhecido como Paradoxo Banach-Tarski.[26]

A partir de 1925, Tarski começa a dar aulas na Universidade de Varsóvia, ministrando cursos de lógica e matemática elementar com uma abordagem mais avançada, os quais, como apontam McFarland, McFarland & Smith, eram frequentados pelo público em geral, mas também por futuros professores. Nesse mesmo ano, Tarski também começa a dar aulas na escola *III Gimnazjum Me'skie Zwia'zku Zawodowego Nauczycielstwa Polskich Szkół Średnich and Towarzystwo Przyjaciól Polskiej Szkoły Średniej w Warszawie* onde conheceu Maria Witkowska, com quem veio a se casar em 1929, ano que também se tornou oficialmente assistente de Łukasiewicz.[27]

Em 1926, junto com Adolf Lindenbaum (1904–1941) publicou um artigo intitulado "Communication sur les recherches de la théorie des ensembles" [Comunição sobre pesquisas em teoria de conjuntos] na *Sprawozdania z Posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydziat III Nauk Matematyczno-fizycznych* [Relatórios das reuniões da Sociedade Científica de Varsóvia, Corpo Docente III, Ciências Matemáticas e Físicas]. Também, nesse mesmo ano, Łukasiewicz inicia seus seminários de lógica na Universidade de Varsóvia, dos quais Tarski ficou à frente de 1927 à 1939.[28] É nesse período que, segundo McFarland, McFarland & Smith, a partir de sua intensa participação nos seminários de pesquisa de Łukasiewicz e, posteriormente, ocupar a posição de ser seu assistente, Tarski desenvolve seus primeiros trabalhos contendo suas principais ideias em lógica, como as que estão contidas nos artigos "On some Fundamental Con-

[25]Tajtelbaum [Tarski], 1923.

[26]Os textos citados encontram-se respectivamente em: Tarski (1924a); Tarski (1924b); Tarski (1924c); Tarski (1924d) e Tarski(1924e).

[27]MacFarland, MacFarland & Smith (2014, p. 171–174; 190).

[28]McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 194–197), Feferman & Feferman (2004, p. 56) e Givant (1999, p. 50).

cepts of Metamathematics" e em "Concept of a true sentence for formalized deductive systems". Em 1927, nota-se, segundo os estudiosos, que Łukasiewicz era um grande incentivador de que os estudos formais fossem aplicados também em diversas áreas do conhecimento, principalmente em filosofia. Sobre o Segundo Congresso Filosófico Polonês de 1927, McFarland, McFarland & Smith destacam,

> De acordo com o relatório da conferência da lógica Janina Housiassonówna, as seções mais notáveis foram aquelas sobre lógica e psicologia. Jan Łukasiewicz pronunciou a conferência de abertura, nas abordagens tradicional e dedutiva da filosofia. Ele notou que a disciplina de filosofia dera a outras ciências os métodos científicos e dedutivos, mas nunca os aplicara a si mesma. Como consequência, a filosofia tradicional foi dominada por respostas e perguntas sem sentido. Ele recomendou a aplicação do método axiomático dedutivo a todos os problemas da filosofia. Embora Łukasiewicz não tenha mencionado nenhuma outra obra moderna, sua prescrição ecoava as doutrinas da escola de Peano de uma geração anterior e refletia aquelas então formuladas em Viena pela escola lógica positivista. Hosiassonówna relatou que o discurso de Łukasiewicz gerou muita controvérsia e que ele continuou sendo figura central do congresso. Ele deu duas palestras na seção de lógica, comparando a lógica silogística à lógica axiomática moderna e delineando a teoria da dedução que ele e Tarski estavam formulando.[29]

A primeira vez que Tarski apresenta os resultados de suas pesquisas nesses assuntos será nas reuniões do Instituto Filosófico de Varsóvia e Sociedade Filosófica e Matemática Polonesa, em Lwów, dezembro de 1930. As conferências que Tarski ministrou em Lwów nesse período tratavam ostensivamente sobre conceitos metamatemáticos fundamentais. Da reunião dos artigos apresentados nessas conferência, originou-se um material chamado *Fundamental Concepts of Methodology of Deductive Sciences* que segundo ainda os estudiosos, foi considerado um material padrão para a investigação de muitos campos em lógica.[30]

[29] MCFARLAND, MCFARLAND & SMITH (2014, p. 323). Nossa tradução. Lê-se no original: "According to the conference report by Warsaw logician Janina Hosiassonówna, the most notable sections were those on logic and psychology. Jan Łukasiewicz gave the keynote address, on the traditional and the deductive approaches to philosophy. He noted that the discipline of philosophy had given other sciences the scientific and deductive methods, but had never applied those to itself. As a consequence, traditional philosophy was dominated by meaningless answers to meaningless questions. He urged application of the deductive axiomatic method to all problems in philosophy. Although Łukasiewicz mentioned no other modern works, his prescription echoed the doctrines of the Peano school from a generation earlier, and reflected those then being formulated in Vienna by the logical positivist school. Hosiassonówna reported that Łukasiewicz's address stirred up much controversy, and that he remained the central figure of the congress. He gave two talks in the logic section, comparing syllogistic to modern axiomatic logic, and outlining the theory of deduction that he and Tarski were formulating. Tarski presented yet another talk, continuing that discussion."

[30] MCFARLAND, MCFARLAND & SMITH (2014, p. 321–323).

Entre 1929 e 1930, Tarski pleiteou uma vaga como professor titular na Universidade de Lwów, tendo como concorrente, Leon Chwistek (1884–1944), que acabou vencendo a disputa.[31] Ainda em 1930, apesar de não obter sucesso na disputa pela vaga de professor, Tarski faria importantes contatos e começaria a impulsionar mais sua pesquisa internacionalmente realizando uma série de palestras em Viena a convite de Karl Menger (1902–1985), que contou com a presença de importantes nomes, como Rudolf Carnap (1881–1970) e Kurt Gödel (1906–1978), entre outros. Em tais palestras, Tarski pôde apresentar parte de seu trabalho que lidava com alguns conceitos fundamentais das ciências dedutivas. Como destacam Feferman & Feferman, a motivação do convite de Menger e os conteúdos apresentados nas reuniões, marcam o início de uma relação intelectual influente entre os membros de dois círculos acadêmicos, cada qual com os seus objetivos.[32]

> A segunda palestra de Tarski lidava com alguns conceitos fundamentais de metodologia das ciências dedutivas, estruturada em termos das mais gerais propriedades da relação de consequência. Menger escolheu esse tópico entre outros oferecidos por Tarski porque pensou que tal conteúdo mostrava a possibilidade de obter resultados valiosos, embora não necessariamente impressionantes desenvolvidos dentro de uma metalinguagem para sistemas lógicos. Apesar de Carnap 'logo reconhecer a importância desse tópico para a filosofia e expressasse seu apreço.'[33]

Também em 1930 foram publicados uma série de artigos a respeito de conceitos e temas comuns à metamatemática apresentados em Viena, nos quais Tarski já traba-

[31]Feferman & Feferman (2004, p. 67). Os autores citam uma carta de Bertrand Russell como sendo um dos fatores decisivos para a escolha de Chwistek: "Tarski's support came from the frand old man of philosophy department in Lvov, Kazimierz Twardowski, and his former student Kazimierz Ajdukiewicz. From Warsaw, Łukasiewicz, Leśniewski, and Kotarbiński weighed in favor of Tarski, while the Cracow faculty supported Chwistek. Outside opinions were solicited as well; of these, Bertrand Russell's letter of 29 December 1929 was probably decisive:

> I much regret that owing to my absence in America your Letter on the 31st of October has remained hitherto unanswered. I know the work of Dr. Chwistek and think very highly of it. The work of Mr. Tarski I do not at the moment remember and do not have access to at present. In these cirscumstances, I can only say that in choosing Dr. Chwistek you will be choosing a man who will do credit, but I am not in a position to compare his merits with those of Mr. Tarki".

[32]Feferman & Feferman (2004, p. 81): "At his first lecture for the Mathematical Colloquium, Tarski chose to report on some results in set theory; for the remaining two lectures he asked Menger to make a selection from several topics in logic. In his memoir, Menger wrote that he chose two that not only illustrates the work done in Warsaw but also seemed to him to fill the needs of the Circle."

[33]Feferman & Feferman (2004, p. 81). Nossa tradução. Lê-se no original: "The second of Tarski's lectures, which dealt with some fundamental concepts of the methodology of deductive sciences, framed in terms of the most general properties of the consequence relation. Menger had picked this topic among those offered by Tarski because he thought it showed the possibility of obtaining valuable if not necessarily earth-shaking results' developed within a metalanguage for logical systems. Though Carnap 'soon recognized the importance of the topic for philosophy and expressed his appreciation.' "

lhava desde 1928. Givant escreveu um interessante trabalho que relaciona os diversos campos em que Tarski atuou no decorrer de sua carreira a alguns aspectos que podem ter influenciado seu interesse e desenvolvimento nesses assuntos.[34] O encontro proporcionado por Menger, conectou grandes mentes da época que trabalhavam sob a perspectiva de uma abordagem rigorosa, em problemas variados, pautada sobretudo na lógica. Do aprimoramento conceitual da análise metamatemática surgiram importantes resultados e novos problemas. Gostaríamos de destacar aqui o trabalho de Gödel, que já havia demonstrado a completude da lógica de primeira ordem em 1929, e que também por meio de uma análise metamatemática, mostrou que em vários sistemas axiomáticos pressupostos como consistentes, há sentenças desses sistemas, as quais não podem ser provadas ou cuja verdade não pode ser garantida pelos axiomas.[35] Esses resultados ficaram conhecidos como teorema da incompletude, publicados em 1931 juntamente com os trabalhos de Tarski sobre a definição de verdade em linguagens formais, publicado em 1933, no qual também contém seu teorema que mostra a impossibilidade de se definir verdade para uma linguagem aritmetizável a partir dela mesma.[36]

Em 1930, junto com Sierpiński publicou "Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles" [Sobre uma propriedade característica de números inacessíveis] na *Fundamenta Mathematicae*. No mesmo ano publicou o artigo intitulado "Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik" [Sobre alguns conceitos fundamentais em metamatemática], publicado em *Sprawozdania z Posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydziat III Nauk Matematyczno-fizycznych*. Também publicou "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften" [Conceitos fundamentais em metodologia das ciências dedutivas] publicado na *Monatshefte für Mathematik und Physik* [Livros mensais de matemática e física]. Junto com Łukasiewicz, também em 1930 e na mesma revista, publicou um artigo intitulado "Untersuchungen über den Aussagenkalkül" [Investigações sobre cálculo sentencial].

Junto com Kuratowski, em 1931, publicou na *Fundamenta Mathematicae* um artigo intitulado "Les opérations logiques et les ensembles projectifs" [Operações lógicas e conjuntos projetivos].

Em 1933, Tarski publicou o artigo intitulado "Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit" [Algumas observações

[34] Givant, (1999, p. 50). O autor destaca algumas publicações de Tarski, entre elas, apontamos as obras que nos interessam aqui, como "On some fundamental concepts of metamathematics" de 1930; "The concept of truth in formalized languages" de 1935 e "On the concept of logical consequence" de 1936 entre outras como relacionados aos seguinte fatores: o crescente interesse em teoria dos conjuntos proporcionado pelos paradoxos descobertos naquele período, a ativa atuação de Tarski nos seminários de Łukasiewiski e sua necessidade econômica, rendeu-lhe importante experiência no ensino de disciplinas matemáticas.

[35] Gödel (1929 [1986], p. 61).

[36] Sobre os teoremas da incompletude, vide Gödel (1931 [1986], p. 145).

sobre os conceitos de ω-consistência e ω-completude] na *Monatshefte fur Mathematik und Physik*. Nesse mesmo ano, Quine, que acabara de receber seu doutoramento pela Universidade de Harvard, fazia uma *tour* com sua esposa Naomi por diversos países da Europa, tendo a oportunidade de conhecer alguns de seus centros intelectuais. Nesse itinerário, quando estivera em Varsóvia, pode conhecer pessoalmente grandes nomes da Escola Lwów-Varsóvia, como Łukasiewicz, Leśniewski, Kotarbiński e Tarski. No ano seguinte, em 1934, Tarski seria nomeado como professor adjunto nos seminários de Łukasiewicz.

Em 1935, Tarski publicou os artigos "Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra" [Sobre os fundamentos da Álgebra Booleana] e "Grundzüge des Systemankalküls. Erster Teil" [Fundamentos do cálculo de sistemas], ambos na *Fundamenta Mathematicae*. Nesse mesmo ano, publicou um de seus mais célebres trabalhos, contendo uma de suas mais importantes contribuições, o artigo publicado originalmente em alemão e intitulado "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" [O conceito de verdade em linguagens formalizadas] na *Studia Philosophica*. O conteúdo desse artigo ganhou uma versão em 1944 focada em uma exposição menos técnica e que expunha de maneira mais didática a problemática envolvida no artigo de 1935, assim como suas implicações e respostas a algumas críticas.

Em 1936, publicou os artigos "O ugruntowaniu naukowej semantyki" [O estabelecimento da semântica científica] na *Przeglad Filozoficzny*. E seu também célebre artigo intitulado "O poje'ciu wynikania logicznego" [Sobre o conceito de consequência lógica]. O conteúdo do primeiro artigo ja havia sido apresentado em conferências em Lwów e Varsóvia como mencionado anteriormente. O conteúdo do artigo de 1936 foi apresentado, um ano antes, em um congresso sobre filosofia científica, em Paris, evento que teve Bertrand Russell abrindo as conferências e comunicações, e que contou com a presença de vários nomes do Círculo de Viena. A natureza desse artigo será explorada em detalhes no Capítulo 2 desta dissertação. Antes de sua vida mudar drasticamente, mais uma vez por motivos antissemitas, como os biógrafos Feferman & Feferman indicam, em 1937, Tarski perderia mais uma chance de ser contratado como professor titular na Universidade de Posnânia.[37]

Em 1939, Tarski recebeu um convite de Quine para o Congresso de União da Ciência nos Estados Unidos que aconteceria na Universidade de Harvard. Nesse período, a Europa já se encontrava em clima de bastante tensão política que inquietava a população. Mediante esse cenário, Tarski hesitou em responder prontamente ao convite. Como apontam Feferman & Feferman, esse ambiente instável e a morte de Leśniewski, fez com que Tarski além de temer deixar sua família em um possível ambiente hostil, fez também com que ele considerasse a possibilidade de preencher a posição deixada

[37] Feferman & Feferman (2004, p. 102).

pelo seu antigo professor. Após a insistência de Quine para Tarski considerar a imigração, a promessa de que ele poderia ministrar uma série de conferências em diversos centros universitários dos Estados Unidos, bem como e o clima de muita incerteza na Europa, principalmente para pessoas de origem judaica, Tarski que ja sentia claramente os ânimos antissemitas lhe perseguindo, aceita ir para os Estados Unidos, ainda que não com a intenção de se mudar, mas para conhecer novas possibilidades. Acerca dessas circunstâncias descrevem Feferman & Feferman:

> Ele (Quine) escreveu novamente, propondo que Tarski considerasse a possibilidade de uma posição na América, adicionando que arranjaria algumas conferências para ele após o encontro em Harvard. Essas palavras surtiram efeito. Depois de esperar até que fosse tarde demais, Tarski decidiu deixar as coisas seguirem seu curso em Varsóvia na sua ausência; e ele começou a cogitar seriamente a ideia de procurar um emprego nos Estados Unidos. No último minuto, ele aceitou o convite de Quine. Como um orgulhoso patriota polonês enraizado nos costumes de seu país, era difícil pensar em partir, mas, a essa altura, ele pensou que estava apenas testando as águas. Ele faria palestras em universidade nos Estados Unidos e veria as oportunidades que a América oferecia; caso se mudasse, seria apenas temporário.[38]

A invasão nazista da Polônia aconteceria em 1º de setembro de 1939, dando início à Segunda Guerra Mundial. Após o congresso em Harvard, Tarski realizou uma série de conferências sobre suas pesquisas e conseguiu uma posição como professor visitante na City College of New York que livrou-lhe de problemas com sua situação de imigrante nos Estados Unidos. Apesar de sua situação legal no país, Tarski não obteve sucesso em resgatar sua família da Polônia, ficando separados até o final da Guerra. Entre esse período, Tarski passou por muitos centros universitários do país, sendo sempre recebido como um grande lógico da Europa, foi com o tempo se inserindo num círculo intelectual de bastante expressividade.[39] Em 1942, Tarski recebe a oferta de assumir uma posição como professor na Universidade da Califórnia, em Berkeley. Com o fim da Segunda Guerra Mundial na Europa em 8 de maio em 1945, Tarski se tornou cidadão americano e pôde trazer sua família para os Estados Unidos. Infelizmente, seus pais,

[38]Feferman & Feferman (2004, p. 106–108). Nossa tradução. Lê-se no original: "He wrote again, proposing that Tarski consider the possibility of a position in America, adding that he would arrange a few lecture engagements for him after the meeting at Harvard. Those words had an effect. After waiting until was almost too late, Tarski decided to let matters take their course in Warsaw in hi absence; and he began to entertain seriously the idea of looking for a position in the United States. At the very last minute, he accepted Quine's invitation. As a proud Polish patriot rooted in his country's ways, it was hard to think of leaving, but at this point he thought he was only testing the waters. He would lecture at universities in the United States and would see what opportunities America offered; if he moved, it would only be temporary."

[39]Feferman & feferman (2004, p. 124–170).

irmão e colegas como Adolf Lindenbaum e Janina Hosiasson-Lindenbaumowae foram assassinados pelos nazistas durante o período da guerra.[40] Tarski que já era considerado um grande lógico e pesquisador pela comunidade acadêmica internacional, pôde em Berkeley consolidar um importante centro de pesquisa em lógica difundindo seus principais trabalhos. De maneira direta ou indireta, através de seu trabalho como pesquisador e como professor, levou adiante muitas de suas contribuições e influenciou os desenvolvimentos posteriores desses assuntos. Sua maneira de conduzir as aulas e seminários, seu inestimável apreço por rigor e precisão em trabalhos e apresentações, assim como sua própria agenda de pesquisa dentro da lógica, além de moldar uma geração de professores de lógica, influenciou a maneira como tal disciplina seria abordada, pesquisada e ensinada.

Em 1975, Tarski visita ao Brasil atendendo ao convite de Ayda Ignez Arruda (1936–1983) e Newton da Costa (1929) para visitar o então Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, (IMECC), da Universidade Estadual de Campinas. Durante sua estadia em Campinas, ministrou duas conferências sobre álgebra relacional. Os trabalhos apresentados foram transcritos em português, inglês e reunidos no livro Alfred Tarski: conferências na Unicamp em 1975 [Lectures at UNICAMP in 1975] de Leandro Suguitanmi, Itala M. L. D'Ottaviano e Petrúcio Viana, lançado em 2016.

Além da importância direta dessa visita, podemos também apontar certa influência indireta no que diz respeito ao desenvolvimento da lógica no Brasil a partir do final da década de 1970. Nesse período, diversos pesquisadores tiveram a oportunidade de estudar no Exterior, alguns deles participaram do *Group in Logic and Methodology of Science* na Universidade de Berkeley, centro de pesquisa construído em torno da influência intelectual de Tarski e que contava com diversos pesquisadores que emigraram para os Estados Unidos. Entre tais estudiosos brasileiros, destaca-se a figura de Oswaldo Porchat Pereira (1933–2017), que após um período de pós-doutoramento (1969–1970) no grupo de pesquisa em Berkely, trouxe a ideia de estabelecer um centro de pesquisa similar no Brasil e que, após alguns entraves políticos, culminou na criação do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) em 1977.[41] Tal grupo tornou-se um centro de gravidade para os estudos de lógica no país e formou muitos professores e professoras que ajudaram no desenvolvimento de tais estudos nas

[40] McFarland, McFarland & Smith (2014, p. 330–336).

[41] D'Ottaviano & Gomes (2011, p. 16–17): "The fruitful experiences of Brazilian students in the U.S. and Europe should be noted in this respect. These student exchanges contributed greatly to widening the horizons of logical studies in Brazil, and were made possible thanks to the vigorous support of National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) of the Brazilian government. As a result of this support, quite a few Brazilian scholars have been trained in Europe at French, Belgian, German, and Scandinavian universities. A good example this kind of international exchange was the intense participation of Brazilians in the celebrated Group in Logic and the Methodology of Science at the University of California, Berkeley, which brought together around the figure of Alfred Tarski (1901–1983) some of the 20th century's best specialists in the logic, including Henkin, Craig, Addison, Vaught, and Mates."

demais universidades brasileiras. Apesar de ser difícil determinar exatamente o grau de influência de Tarski, nota-se a partir do que foi apresentado, que de uma maneira direta e indireta, construiu-se ao redor da figura de nosso autor, uma comunidade que aos poucos extrapolou fronteiras. Assim, sendo Tarski, como apontam Feferman & Feferman, conhecido entre seus alunos como "Papa Tarski", podemos considerar de maneira análoga que as gerações de alunos que influenciou, tornaram-se "missionários da lógica" que se espalharam pelo mundo levando adiante não só a pesquisa em lógica mas também os valores intelectuais que tanto distinguiram nosso autor. Alfred Tarski lecionou e orientou estudantes até sua morte em 27 de outubro de 1983 em Berkeley, deixando um importante legado.

Capítulo 2

Abordagem teórico-dedutiva e o operador de consequência

O operador tarskiano de consequência lógica é apresentado em dois artigos de 1930, intitulados, originalmente, "Über eimge Fundamentale Begriffe der Metamathematik" [Sobre alguns conceitos fundamentais em metamatemática] e "Fundamentale Bregriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften" [Conceitos fundamentais da metodologia das ciências dedutivas], sendo o primeiro dedicado a tratar de aspectos gerais de um sistema dedutivo clássico e o segundo de um sistema dedutivo a partir de um grau maior de generalidade. Como tais trabalhos pertencem às investigações metateóricas ou metamatemáticas, é interessante compreendermos de maneira geral a natureza dessas categorias de análise. Ou seja, para analisarmos a noção de consequência presente nesses trabalhos, convém situarmos o campo da investigação no qual tais propostas foram feitas, de modo que nos permita compreender melhor suas influências e desenvolvimento, e assim visualizar seus vínculos com a nascente *teoria da prova* ou a abordagem *teórico-dedutiva* da noção de consequência.

Assim, começamos nosso percurso até os trabalhos de Tarski buscando apreender o cerne da abordagem teórico-dedutiva moderna e que, de certa forma, tem sua gênesis no surgimento do método axiomático, cujo desenvolvimento, culmina na noção de demonstração formal. Uma vez que seja possível ilustrarmos o contexto em questão, lançaremos nosso olhar para como a concepção de prova é desenvolvida a partir da noção de demonstração formal. Para os nossos objetivos, essa investigação é importante na medida em que é na ideia de prova que podemos observar a noção de consequência sendo trabalhada, no caso, em termos teórico-dedutivos.

Deste modo, pretende-se neste capítulo estudar a abordagem da noção de consequência presentes nos trabalhos que permitiram o desenvolvimento teórico-dedutivo a partir do século XX, e dos quais, no geral, caracterizam, entre outras coisas, o objeto das análises metamatemáticas. Sendo assim, destacamos a noção de consequência trabalhada no surgimento da concepção de demonstração formal em Frege e como Hilbert aprimorou e estendeu tal noção às disciplinas matemáticas formalizadas, e então, as contribuições de Tarski. A partir disso, esperamos explicitar os diferentes níveis de tratamento encontrados nesses trabalhos e identificarmos a noção pré-teórica de consequência presente na abordagem praticada por esses autores.

Antes de abordarmos propriamente alguns aspectos teóricos específicos de cada autor, é interessante notar o desenvolvimento que motiva tais investigações. O assunto principal, a partir do qual damos início à nossa apresentação, diz respeito principalmente à tentativa de justificar satisfatoriamente a matemática. Assim sendo, pode-se ter algum valor uma breve digressão em relação às discussões dos fundamentos da matemática, principalmente no que diz respeito ao método axiomático moderno. Nesse sentido, é interessante observar também as considerações de Tarski, sobre tal desenvolvimento, presente em dois artigos intitulados "Some current problems in metamathematics" [Sobre alguns problemas atuais em metamatemática] e "Truth and Proof" [Verdade e Demonstração]. Nesses artigos, Tarski destaca aspectos que julga importantes no desenvolvimento dos estudos metamatemáticos, tecendo em alguns momentos considerações históricas. A partir disso, é possível notar nestes escritos de Tarski em relação ao desenvolvimento da metamatemática, a importância de três principais fatores: o desenvolvimento axiomático e o surgimento das geometrias não euclidianas, o desenvolvimento da lógica matemática e a formulação da teoria de conjuntos. Dentre estes aspectos, Frege e Hilbert podem ser considerados como grandes expoentes, o primeiro à respeito de uma formulação de um método demonstração formal, e o segundo em relação a uma teoria axiomática a partir de uma abordagem puramente formal. Assim, a seguir expomos os comentários de Tarski sobre o desenvolvimento da metamatemática como mencionamos, ilustrando teoricamente a partir de alguns trabalhos de Frege e Hilbert, as noções de demonstração formal e método axiomático, onde por sua vez podemos notar caracterizações da noção de consequência em termos teórico dedutivos.

2.1 Método axiomático

De acordo com Tarski, preocupações comuns à metamatemática, ou seja, em relação à natureza e à essência dos enunciados matemáticos, surgiram com a própria matemática, apesar de que o rigor e a profundidade com que foram tratados os conceitos e as teorias matemáticas diferem do tratamento atual que se dá a essas questões. Entretanto, é certo que anteriormente ao advento das geometrias não euclidianas e das estruturas algébricas, a matemática consistia apenas de um conjunto de sentenças que carecia de sistematização rigorosa que pudesse configurar uma base sólida e objetiva, motivando a procura de maneiras que pudessem atestar a sua validade ou veracidade.[1]

> Até aquele tempo, o critério de evidência era aplicado sem restrição para a expansão do conhecimento matemático. Mas parece-me claro que podemos ver toda evolução subsequente da concepção de ciência matemática como uma tendência sistemática em limitar esse critério, ou talvez, até eliminá-lo completamente.[2]

Na busca por fundamentos do saber matemático, segundo Tarski, emergem no debate noções que permitem balizar a validade desta ou daquela sentença, baseadas na necessidade de uma justificativa precisa e objetiva, que se desdobra na noção de dedução e demonstração. Acerca do conceito de demonstração, Tarski explica que:

> A noção de demonstração [...] refere-se justamente a um procedimento para determinar a verdade de sentenças empregado primordialmente nas ciências dedutivas. Tal procedimento é elemento essencial do que é conhecido por método axiomático, atualmente o único método usado para desenvolver as disciplinas matemáticas.
>
> O método axiomático e, dentro de sua estrutura, a noção de demonstração, são produtos de um longo desenvolvimento histórico. Um conhecimento básico desse desenvolvimento é essencial para a compreensão da noção contemporânea de demonstração.[3]

Em relação ao método axiomático, de modo geral, podemos dizer que a veracidade de determinada sentença deixa de ser apoiada em uma noção que apela ao caráter intuitivo da mesma, e passa a ser obtida por meio de uma demonstração. A demonstração, por sua vez, caracteriza-se pela ação de evidenciar ou trazer à tona, que determinada sentença cuja validade se investiga, pode ser obtida ou derivada a partir de um número bastante reduzido de sentenças consideradas como intuitivamente válidas. Assim, levando-se em consideração o fato de que quando queremos explicar ou justificar uma sentença, recorremos a outras sentenças e assim por diante, o caráter intuitivo passa a ser delimitado a um número reduzido de pressupostos inicialmente aceitos que tenham maior abrangência explicativa dentro de seus respectivos domínios.

[1] Tarski (1969 [2007], p. 223). Tarski não deixa claro a qual matemática ele se refere quando faz essa consideração. É certo que o ramo e a disciplina matemática tem sido praticada desde a antiguidade e assumiu diversos aspectos em diferentes lugares. Porém, entendemos que aqui, provavelmente Tarski se refere a toda matemática anterior ao século XIX e que se assemelha ao que foi praticado na Grécia clássica.

[2] Tarski (1939/40 [1995], p. 160). Nossa tradução. Lê-se no original: "At that time the criterion of evidence was applied without restraint for the expansion of mathematical knowledge. But it seems to me that one can view the whole subsequent evolution of the conception of mathematical science as a systematic tendency to limit this criterion, or perhaps even to eliminate it completely."

[3] Tarski (1969 [2007], p. 222–223).

A ideia de axiomatização pode ser identificada na matemática grega e em autores como Aristóteles, o qual discorre em um sentido formal dessa acepção, sendo o primeiro a debater rigorosamente a abordagem axiomática em ciência, exposta na obra Segundos Analíticos. Já em Euclides temos o método axiomático desenvolvido em contexto matemático, ou seja, diferente de Aristóteles, a axiomatização é feita especificadamente, no caso, não apenas em relação a proposições geométricas, mas também de enunciados aritméticos e algébricos. Durante um longo período esse método foi utilizado para justificar enunciados matemáticos, os quais eram reduzidos a outros enunciados, que por sua vez, eram elegidos a partir de critérios intuitivos, considerados também como *intuitivamente válidos*.[4] Deste modo, com a adoção de tal método, a intuição da sentença em si é deslocada para outras sentenças consideradas de natureza mais elementar e das quais pode-se deduzir as demais.

Com o método axiomático, explica Tarski, a organização do saber matemático passa a ter um critério para verificar a veracidade de uma sentença, a demonstração. A demonstração, como o autor aponta, consiste na ação de trazer à tona, ou evidenciar por meio de técnicas admitidas, a justificativa de que a proposição *sub judice* está adequadamente relacionada (a partir dos métodos admitidos) com as pressuposições inicialmente aceitas. A preocupação subsequente é a seleção dos termos e noções que serão empregadas do método axiomático, ou seja, as pressuposições iniciais adequadas.[5] Durante um longo período os matemáticos apresentaram suas demonstrações da maneira como Euclides formulou. Apenas na primeira metade do século XIX, por meio dos esforços para provar o axioma das paralelas a partir dos demais ou tentando mostrar a inconsistência na teoria caso o axioma em questão fosse negado, mostrou que a geometria poderia ser construído a partir de axiomas diferentes dos euclidianos.

Nesse sentido, a dialetização dos axiomas da geometria euclidiana gerou a construção de geometrias baseadas em axiomas distintos, no caso, em geometrias que negavam o axioma das paralelas, o quinto postulado de Euclides. Segundo Tarski, os matemáticos foram colocados frente ao fato de que era possível a construção de teorias matemáticas baseadas em axiomas diversos e que poderiam ter um caráter não intuitivo.[6] Eis que a propriedade de ser intuitivamente verdadeiro ou evidente mostrou-se

[4]Murawski (2002, p. 94): "Add that the Euclid's approach (connected with Platonic idealism) to the problem of the development of mathematics and the justification of its statements (which found its fulfilment in the Euclidean paradigm), i.e., justification by deduction (by proofs) from explicitly stated axioms and postulates, was not the only approach and method which was used in the ancient Greek (and later). The other one (call it heuristic) was connected with Democritean materialism. It was applied for example by Archimedes who used not only deduction but any methods, such as intuition or even experiments (not only mental ones), to solve problems. Though the Euclidean approach won and dominated in the history, one should note that it formed rather an ideal and not the real scientific practice of mathematicians. In fact rigorous, deductive mathematics was rather a rare phenomenon."

[5]Tarski (1969 [2007], p. 224). Vide também Tarski (1939/1940 [1995]) artigo editado por Woleński e Jan Tarski.

[6]Tarski (1969 [2007], p. 225): "Numa certa época, entretanto, começou-se a sentir a necessidade de

não mais como uma propriedade segura e cabal para o fazer matemático, restando a consistência dos axiomas, como a única propriedade em que poderia apoiar-se.

> Uma grande descoberta foi feita, que é perfeitamente possível basear a ciência matemática em axiomas os quais poderiam ser não evidentes, ou até, sob os quais aparentam ser intuitivamente falsos. E um caminho foi aberto para a concepção de teoria matemática como um sistema de sentenças as quais são derivadas por deduções dos axiomas que podem ser escolhidos arbitrariamente, sem qualquer restrição em relação a sua verdade ou significado. Quando tal concepção de teoria matemática é assumida, a consistência lógica de uma dada disciplina se torna a única substituta para a verdade intuitiva, e a importância da noção de consistência é bastante enaltecida.[7]

Assim delineada a disciplina matemática, como aponta Nagel & Newman, a concepção desta disciplina como uma ciência da quantidade, foi aos poucos substituída pela imagem do matemático puro que tem como expediente apenas a testagem ou derivação de consequências dos axiomas, sem se preocupar com a sua veracidade.[8] Ou seja, o matemático puro nada mais faz que investigar *consequências lógicas* dos axiomas sejam eles quais forem. Além disso, a noção de demonstração também passa a ser entendida sempre como relativa a algum sistema axiomático. A partir disso, inúmeros estudos e sistemas matemáticos foram construídos sob variados pressupostos, o que, sob certo sentido, demandou a busca por ferramentas e métodos que pudessem assim avaliar essa nova configuração da matemática.

submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, a qual acarretaria uma restrição, nesse contexto, do recurso à evidência intuitiva. Isso provavelmente relacionou-se com alguns desenvolvimentos específicos na matemática; com a descoberta das geometrias não-euclidianas, em particular. A análise foi feita por lógicos, a começar pelo lógicos alemão Gottlob Frege, levando à introdução de uma nova noção – a de demonstração forma – que se mostrou um substituto adequado e uma melhoria essencial sobre a antiga noção psicológica."

[7] Tarski (1939/40 [1995], p. 161). Nossa tradução. Lê-se no original: "The great discovery was made, that it is perfectly possible to base a mathematical science on axioms which are non-evident, or even on those which seem intuitively false. And the way was opened for the conception of mathematical theory as a system of sentences which are derived by deduction from axioms which may be arbitrarily chosen, without any restriction as to their truth or meaning. When such a conception of mathematical theory is assumed, the logical consistency of a given theory became the only substitute for its intuitive truth, and the importance of the notion of consistency was greatly enhanced."

[8] Nagel & Newman (2007, p. 19): "[...] pouco a pouco, tornou-se claro que o negócio mesmo do matemático puro é *derivar teoremas de hipóteses postuladas* e que não lhe compete, como matemático, decidir se os axiomas que pressupõe são realmente verdadeiros". Os autores reforçam a ideia na página seguinte: "Repetimos que o problema com o qual o matemático puro se defronta (diferentemente do cientista que emprega a matemática ao investigar um assunto especial) não é se os postulados por ele assumidos ou as conclusões que deles deduz são verdadeiros, mas se as alegadas conclusões são de fato *consequências lógicas necessárias* das pressuposições inicias." Grifos no original.

2.1.1 A noção de demonstração formal

É diante das peculiaridades e demandas emergentes no contexto descrito acima que o trabalho de Frege se introduz de maneira decisiva na história da lógica. Buscando meios para realizar seu próprio projeto fundacional da matemática, Frege identificou dificuldades na maneira como os matemáticos faziam as demonstrações e percebeu a necessidade de que as investigações nesse sentido fossem mais precisas, de modo que pudéssemos avaliar mais claramente as conexões lógicas dos enunciados. Assim, esse objetivo encontra barreiras se assentado na linguagem natural, pois esta apresenta grande variedade de significados de seus termos, dificultando uma análise lógica do conteúdo das sentenças apresentadas. Sobre a imprecisão das análises, Frege assim se posiciona,

> [. . .] ela pode ser afastada apenas por meio de uma cadeia de raciocínio sem lacunas, de modo que não seja dado nenhum passo que não se conforme a um dos poucos modos de inferência reconhecidos como puramente lógicos. Talvez até hoje não se tenha assim conduzido nenhuma demonstração, visto que os matemáticos se contentam com que cada passagem a um novo juízo se evidencie correta, sem indagar pela natureza desta evidência, se lógica ou intuitiva. Este progresso é frequentemente muito complexo, e equivalente a várias inferências simples, entre as quais pode insinuar-se ainda algo retirado da intuição. Procede aos saltos, nascendo daí a aparência de uma precariedade enorme de modos de inferência em matemática; pois quanto maiores os saltos, maior o número de combinações de inferências simples e axiomas intuitivos de que podem fazer as vezes.
>
> Impõe-se, portanto, a exigência de que sejam evitados todos os saltos na inferência. Que seja tão difícil satisfazê-la, isto deve-se à morosidade de um procedimento passo a passo. Toda demonstração um pouco mais complicada ameaça tornar-se enormemente longa. Além disto, a imensa variedade de formas lógicas estampadas na linguagem dificulta a delimitação de um conjunto de modos de inferência suficiente para todos os casos e que se pudesse facilmente abarcar.[9]

A partir de sua conceitografia (*Begriffsschrift*), Frege então introduz uma linguagem simbólica adicionando noções matemáticas como função, relação e objeto, dando um passo à frente da silogística aristotélica, limitada em expressividade, e faz de seu sistema capaz de representar adequadamente sentenças contendo generalidades e raciocínios matemáticos. Frege também exige que além de uma linguagem simbólica, o sistema formal deve apresentar um aparato dedutivo explicitado de modo que sejam

[9]Frege (1884 [1974], p. 272–273).

sempre claras as relações entre os enunciados do sistema e por meio do qual seja possível expressar rigorosamente as relações de consequência lógica.[10] Após apresentar os fundamentos da sua linguaguem simbólica, Frege se preocupa em construir um método o qual seja capaz de reduzir e expressar certa multiplicidade de relações entre sentenças a um número bastante reduzido de leis e axiomas, de forma que sejam objetivamente claras as conexões lógicas mantidas entre elas. Esse processo de redução é, entre outras coisas, onde podemos observar a imagem de demonstração formal e, consequentemente, a noção do que é uma prova dentro do sistema fregeano.

> §13. Já introduzimos um número de princípios fundamentais do pensamento no primeiro capítulo a fim de transformá-los em regras para o uso de nossos símbolos. Essas regras e leis cuja transformação não podem ser expressos na ideografia porque formam sua base. Agora no presente capítulo um número de julgamentos do puro pensamento para o qual isso é possível será representado em símbolos. É natural derivar julgamentos mais complexos dos simples, não a fim de torná-los mais certos, o que poderia ser desnecessário em muitos casos, mas na finalidade de manifestar as relações de julgamento com outros. Simplesmente saber as leis obviamente não é o mesmo como saber delas juntas com as conexões que algumas tem com outras. Dessa maneira, chegamos a um pequeno número de leis as quais, se nós adicionarmos o que está contido nas leis, o conteúdo de todas as leis está incluído, embora em um estágio subdesenvolvido. E esse modo dedutivo de apresentação nos torna familiarizados com esse núcleo é outra de suas vantagens. Visto que, em vista da infinita multidão de leis que podem ser decretadas, não podemos listá-las todas, não podemos alcançar a perfeição exceto procurando aquelas que, por seu poder, contêm todas. Ora, deve-se admitir, certamente, que o caminho aqui seguido não é o único em que a redução pode ser feita. É por isso que nem todas as relações entre as leis do pensamento são elucidadas por meio do presente modo de apresentação. Talvez haja outro conjunto de julgamentos a partir do qual, quando aqueles contidos nas regras são adicionados, todas as leis do pensamento podem

[10] FREGE (1893 [1964], p. 29): "In my *Grundlagen der Arithemetik*, I sought to make it plausible that arithmetic is a branch of logic and need not borrow any ground of proof whatever from either experience or intuition. In the present book this shall now be confirmed, by the derivation of the simplest laws of Numbers by logical means alone. But for this to be convincing, considerably higher demands must be placed on the conduct of proof than is customary in arithmetic. A few methods of inference must be marked out in advance, and no step may be taken that is not in accordance with one of these. Thus in passing on to a new judgement one must not be satisfied, as the mathematicians have nearly always been hitherto, with the transition's being evidently correct; rather one must split it into the logically simple steps of which it is composed - and of which there are frequently not a few. In this way no presupposition can pass unnoticed; every axiom required must be uncovered. It is indeed precisely the presuppositions made tacitly and without clear awareness that obstruct our insight into the epistemological nature of a law."

> ser deduzidas da mesma forma. Ainda assim, com o método de redução apresentado aqui, uma tal multiplicidade de relações é exibida e qualquer outra derivação será muito facilitada.[11]

Com isso, estariam demostrados os benefícios alcançados pela clareza e rigor da análise a partir de uma formalização ou, mais precisamente, de um sistema formal dedutivo. Nesse sentido, tal sistema consiste em uma linguagem formal, em regras sintáticas sobre a formação de fórmulas e regras de inferência, definindo a partir destas, quais fórmulas são consideradas dedutíveis de um conjunto de fórmulas. Sendo assim, uma fórmula é dedutível de um conjunto de fórmulas se pode ser obtida a partir deste por meio dos axiomas e regras de inferência, previamente definidos no sistema.[12] Desta feita, por meio de um sistema formal, evidenciam-se as relações lógicas, de modo a permitir um exame preciso da *validade* das proposições, ou seja, se as proposições expressas pelas regras de inferência são, de fato, verdades lógicas a partir dos axiomas do sistema.[13] Blanchette apresenta um esquema geral onde podemos visualizar o que

[11]Frege (1879 [1967], p. 28-29). Nossa tradução. Lê-se na versão inglesa: "§13. We have already introduced a number of fundamental principles of thought in the first chapter in order to transform them into rules for the use of our signs. Theses rules and the laws whose transforms they are cannot be expressed in the ideography because they form its basis. Now in the presente chapter a number of judgments of pure thought for which this is possible will be represented in signs. It seems natural to derive the more complex of thes judgments from simpler ones, not in order to make them more certain, which would be unnecessary in most cases, but in order to make manifest the relations of the judgments to one another. Merely to know the laws is obviously not the same as to know them together with the connections that some have to others, In this way we arrive at a small number of laws in which, if we add those contained in the rules, the content of all the laws ins included, albeit in an undeveloped state. And that the deduvtive mode of presentation make us acquainted with that core is another of its advanteges. Since in view of the boundless multitude of laws that can be enuncited we cannot list them all, we cannot achieve completeness except by searching out those that, by their power, contain all of them. Now it must be admitted, certainly, that the way followed here is not the only one in which the reduction can be done. That is why not all relations between the laws of thought are elucidated by means of the present mode of presentation. There is perhaps another set of judgments from which, when those contained in the rules are added, all laws of thought could likewise be deduced. Still, with the method of reduction presented here such a multitude of relations is exhibited that any other derivation will be much facilited thereby."

[12]Dutihl-Novaes (2011, p. 323): "One might expect that Frege would have used the term 'formal' in the sense of computable. However, as I read him, Frege was not particulary concerned with the mechanical move from premises to conclusion as such. Rather, his main concern seemed to be that every inferential step be made throughly explicit, i.e. that there be no gaps in the expression of an argument (see for exemple, the preface of the begriffsscrift or his critique of Dedekind's lack of explicitness concerning inferential steps in the Grundgesetze. Frege's goal was epistemological clarity, not 'mechanical reasoning' as such, although the requirement that no hidden contentual considerations be incorporated into the application of rules can be read as the demand for a blind, 'mechanical' application of rules (see Sieg 1994, p. 74/75)."

[13]Frege (1893 [1960], p. 137). Frege sobre a importância do método axiomático e como ele vai além do que foi Euclides: "It cannot be required that we should prove everything, because that is impossible; but we can demand that all propositions used without proof should be expressly mentioned as such, so that we can see distinctly what the whole construction rests upon. We should, accordingly, strive to diminish the number of these fundamental laws as much as possible, by proving every-thing that can be proved. Furthermore I demand – and in this I go beyond Euclid – that all the methods of inference used must be specified in advance. Otherwise it is impossible to ensure satisfying the first demand."

siginifica a dedutibilidade dentro do sistema fregeano:

> Uma fórmula ϕ é para ser dedutível de um conjunto Σ de fórmulas apenas se a proposição expressa por ϕ é uma consequência lógica das proposições expressas pelos membros de Σ.[14]

A noção de consequência lógica caracterizada em termos de dedutibilidade, nesse sentido, identifica as regras de inferência e os axiomas como suficientes em apresentar uma relação de consequência lógica. É possível a partir desses aspectos visualizar então o sistema fregeano construído para checar ou trazer à tona a validade lógica de determinadas sentenças. Tal sistema pode ser entendido como um aparato responsável por fornecer provas ou checagem de validade. Esse aparato consiste em estipular certo número de axiomas, reunidos em um conjunto de axiomas lógicos, assim como um conjunto de regras de inferência que regimentam o processo no qual certas sentenças poderão ser inferidas ou derivadas de outras. Assim, a justificativa de uma inferência ou derivação é dada pelos axiomas ou por sentenças previamente justificadas (provadas) pelos axiomas e regras de inferência. Nesse sentido, os critérios e estratégias adotadas por Frege, visando o máximo de clareza possível, representada pela ideia de demonstração formal, também leva a uma ideia de prova a qual será amplamente desenvolvida por seus sucessores.

Apesar de Frege ter como objetivo evidenciar por meio de seu sistema conceitográfico simbólico que a matemática poderia ser reduzida à noções puramente lógicas, ou seja, Frege esperava que seu sistema simbólico fosse capaz de representar relações de consequência lógica, a partir de seus trabalhos, apresenta-se pela primeira vez um sistema formal dedutivo e a partir dele uma noção de *demonstração formal*.[15] Depois dos trabalhos de Frege, o método axiomático ganhou um tratamento formal e como Tarski aponta,

> Esse desenvolvimento claramente mostrou a possibilidade de um tratamento dedutivo estritamente axiomático, não apenas de conceitos especifica-

[14] Blanchette (2001, p. 117). Nossa tradução. Lê-se no original: "A formula ϕ is to be deducible from a set Σ of formulas only if the proposition expressed by ϕ is a logical consequence of the propositions expressed by the members of Σ. A autora ainda complementa: "Since the deducibility relation is typically defined in the familiar way in terms of axioms and rules of inference, the quality-control check is (in principle, at least) simple: one check to see that every proposition expressible by an axiom is a truth of logic, and that each rule of inference countenances the deduction of a formula α from a n-tuple of formulas $\beta_1 ... \beta_n$ only if the proposition expressed by α is a logical consequence of those expressed by $\beta_1 ... \beta_n$."

[15] von Plato (2014, n. p.): "One might contend that Boole is an exception as far as classical propositional logic is concerned. Frege's step ahead was decisive for the development of logic and foundational study. The contrast to the ancients is great: Aristotle gave a pattern for combining arguments, but the idea of a finite closed set of rules was, philosophically, beyond the dreams of anyone before Frege, with the possible exception of Leibniz." Vide também Bocheński; (1985, p. 297–298); Blanché (1996, p. 312–314); Kneale & Kneale (1980, p. 515).

> mente matemáticos, mas também no geral, termos lógicos os quais necessariamente levaram à futura eliminação dos aspectos intuitivos e auto-evidentes na construção de teorias matemáticas.[16]

Tendo à disposição tais métodos e os resultados promissores dessa abordagem, as teorias matemáticas ganham novo tratamento e análise. Neste aspecto, Tarski destaca os resultados obtidos por Hilbert e seus colaboradores que, por meio de uma abordagem que configura o formalismo, elevaram o método axiomático ao seu ápice. Assim, os estudos metamatemáticos, de uma certa maneira, surgem com o objetivo de formular uma análise dos aspectos formais das teorias matemáticas já formalizadas, tão precisa e rigorosa quanto a própria matemática. Para tal, as disciplinas precisam passar por um processo de formalização o qual consiste na abstração do conteúdo de seus enunciados, de modo que se possa representar através de uma linguagem artificial as relações lógico formais mantidas entre suas sentenças. O processo de formalização, destacam autores como Nagel & Newman e da Silva, têm como objetivo trazer à tona certas relações lógico-estruturais que os enunciados mantém entre si.[17]

2.2 A investigação metamatemática

Até aqui podemos notar, como mencionamos na introdução, dois usos distintos da acepção de 'formal'. A formalização presente no projeto de Frege diz respeito a construção de uma estrutura que busca operar de maneira indiferente aos particulares, ou seja, busca apreender relações válidas independentes dos objetos em questão. Já o uso de Hilbert do aparato formal, como veremos a seguir, pode-se denominar, segundo Dutihl-Novaes, de *dessemantização* e ocorre a partir da abstração do conteúdo semântico de determinada disciplina, de modo que seja possível visualizar sua estrutura lógica. Tais acepções, apesar de definirem usos distintos, pertencem à mesma categoria do

[16] Tarski (1939/40 [1995], p. 162). Nossa tradução. Lê-se no original: "This development clearly showed the possibility of an axiomatic, strictly deductive treatment, not only of specifically mathematical concepts, but also of the general, logical terms which necessarily occur in mathematical sentences and arguments. In addition, the newly discovered concept of formal proof led to a further elimination of the intuitive and self-evident in the construction of mathematical theories."

[17] Nagel & Newman (2001) p. 32): "A formalização é um negócio difícil e ardiloso e serve a um valioso propósito. Revela estruturas e funções em sua nua clareza, como o faz a secção de um modelo de máquina em funcionamento. Uma vez formalizado um sistema, as relações lógicas entre proposições matemáticas ficam à vista; pode-se ver os padrões estruturais de várias 'cadeias' de signos 'sem significado' , como permanecem unidos, como estão combinados, como se aninham um no outro e assim por diante." da Silva (2007, p. 187): "Esse procedimento - o de abstrair o sentido dos termos de uma teoria que se quer axiomatizar - tem a óbvia vantagem de impedir que o significado desses termos se intrometa nas deduções, emprestado-lhes verdades que não foram selecionadas como axiomas. A abstração formalizante - ou formalização simplesmente - é um estratagema para manter os procedimentos dedutivos no interior de um sistema axiomático-dedutivo dentro dos limites estabelecidos. Ademais, ela tem a vantagem de pôr às claras o arcabouço lógico de uma teoria."

termo, mais abrangente e anterior, destacada por Dutihl-Novaes como 'formal' pertencente às formas, em oposição a outra grande categoria de usos desse termo, relacionada à regras e normatização. Assim como Frege, Hilbert, a partir de seus estudos metamatemáticos, tinha em mente um programa fundacional para a matemática. Nesse sentido, Hilbert observa a possibilidade de considerar as teorias matemáticas já formalizadas de forma que seja possível estudar, a partir delas, as suas relações axiomático-formais. O principal objetivo nesse sentido, é demonstrar a validade axiomática das teorias matemáticas formalizadas, que consiste, como Hilbert estipula, na prova da consistência do conjunto dos axiomas.

> A ideia fundamental da minha teoria da prova é como se segue: Tudo o que anteriormente constituía a matemática deve ser rigorosamente formalizado, de modo que a matemática propriamente dita ou a matemática em sentido estrito se torne um estoque de fórmulas.
>
> [. . .]
>
> Além dessa matemática formalizada propriamente dita, temos uma matemática que é até certo ponto nova: uma metamatemática que é necessária para garantir a matemática, e na qual – em contraste com os modos puramente formais de inferência na matemática adequada – se aplica a inferência com respeito ao conteúdo, mas apenas para provar a consistência dos axiomas. Nessa metamatemática, operamos com as provas da matemática propriamente ditas, e essas provas são, elas mesmas, o objeto da investigação de conteúdo. Assim, o desenvolvimento da ciência matemática como um todo ocorre de duas maneiras que se alternam constantemente: por um lado, derivamos novas fórmulas prováveis dos axiomas por inferência formal; por outro lado, associamos novos axiomas e provamos sua consistência por inferência intuitiva.
>
> [. . .]
>
> Os axiomas e teoremas demonstráveis (ou seja, as fórmulas que surgem nesta interação) são as imagens dos pensamentos que constituem o procedimento usual da matemática tradicional; mas eles próprios não são as verdades em um sentido absoluto. Em vez disso, as verdades absolutas são os *insights* de que minha teoria da prova fornece a demonstrabilidade e a consistência desses sistemas formais.[18]

[18] Hilbert (1923, p. 1137–1138). Nossa tradução. Lê-se no original: "The fundamental idea of my proof theory is as follows: Everything that previously made up mathematics is to be rigorously formalized,

Assim, do ponto de vista de Hilbert, o qual certamente entusiasmou Tarski, a formalização de uma teoria axiomática ocorre na completa abstração dos termos da teoria restando apenas a pura manipulação de símbolos regidos por regras chamadas de regras de transformação e a estrutura lógica das relações mantidas entre eles.[19] Nesse sentido, podemos notar a diferença dessa abordagem com o método axiomático interpretado, como, por exemplo, o de Euclides e Frege, em relação ao de Hilbert, como explica da Silva:

> Enquanto as demonstrações no sistema de Euclides dependiam muito de intuições espaciais e diagramas, no sistema de Hilbert bastam a lógica e os axiomas para se derivar os teoremas da geometria. Hilbert liberou o método axiomático de suas limitações, abrindo-lhe os horizontes do puro formalismo. Ele viu claramente que a natureza dos objetos de um domínio descrito por uma teoria axiomática interpretada não desempenhava nenhum papel lógico, vislumbrando assim a possibilidade de abstrair completamente a natureza desses elementos, reduzindo domínios matemáticos à sua pura forma lógica, e tradicionais teorias matemáticas à teorias puramente formais.[20]

Uma vez as teorias matemáticas tratadas dessa forma, onde o significado de seus termos são assim abstraídos, ou seja, a característica de seus enunciados são reduzidos às suas formas, a verdade ou a correção dos encadeamentos de suas sentenças tornam-se dispensáveis, na medida em que não trazem mais relevância para a teoria assim formalizada. Nesse sentido, as formalizações a princípio não dizem a respeito de nada, não são verdadeiras nem falsas, evidenciando-se assim a importância da consistência.

---

so that mathematics proper or mathematics in the strict sense becomes a stock of formulae. [...] In addition to this formalized mathematics proper, we have a mathematics that is to some extent new: a metamathematics that is necessary for securing mathematics, and in which – in contrast to the purely formal modes of inference in mathematics proper – one applies contentual inference, but only to prove the consistency of the axioms. In this metamethematics we operate with the proofs of mathematics proper, and these proofs are themselves the object of the contentual investigation. Thus the development of mathematical science as a whole takes place in two ways that constantly alternate: on the one hand we derive new provable formulae from the axioms by formal inference; on the other, we adjoin new axioms and prove their consistency by contentual inference. [...] The axioms and provable theorems (i.e. the formulae that arise in this interplay) are the images of the thoughts that make up the usual procedure of traditional mathematics; but they are not themselves the truths in an absolute sense. Rather, the absolute truths are the insights that my proof theory furnishes into the provability and the consistency of these formal systems."

[19] Dutihl-Novaes (2011, p. 320): "A key term in this passage is 'formal abstraction': abstraction is of course a crucial concept in mathematics, and within the Aristotelian mathematical tradition abstraction typically corresponds to abstraction of form from matter. Here, however, abstraction corresponds to ignoring specifically the meaning (content) of signs; as the inverted commas used by Bernays indicate, 'signs' thus viewed are no longer signs once they become the objects to be considered in themselves, precisely because they are de-semanticized. Significant for our purposes is the fact that the process of abstraction as well as the result obtained (a 'purely formal system') are both qualified as 'formal'."

[20] da Silva (2007, p. 187).

Ou seja, não importa qual interpretação pode ser dada a teoria formalizada, desde que seus axiomas não levem a alguma contradição. Assim, faz-se necessário um estudo dessas teorias formalizadas, no qual Hilbert destacou a importância de estudar os aspectos gerais e importantes dessas teorias na intenção de que se pudesse garantir que não nos levassem a absurdos ou a raciocínios contraditórios, como apontam Gomes & D'Ottaviano,

> Assim, emerge e legitima-se em matemática uma abordagem estritamente formal, sintática e estrutural, na qual um conjunto de axiomas e seus teoremas é estudado a partir do entrelaçamento lógico que os une. Notabiliza-se, nesse sentido, o projeto de fundamentos da matemática de David Hilbert (1862–1943), que recupera a premissa racionalista tão cara a Leibniz e a Wolff, de que qualquer objeto pode existir contanto que seja consistente. No bojo do projeto formalista é justamente a consistência a condição necessária para a existência teórica e matemática. Arauto da consistência, Hilbert perseguiu-a no fito de demonstrá-la vigente nas teorias matemáticas fundamentais como a aritmética.[21]

Nesse sentido, considerando que uma formalização não diz respeito a nada, ou seja, não é verdadeira nem falsa, busca-se demonstrar que essas formalizações não nos conduzem a raciocínios absurdos.[22] Uma maneira de se assegurar isso, bastante defendida por Hilbert, seria demonstrar que a teoria formalizada e axiomatizada não nos leva a contradições, ou seja, provar sua consistência. Até aquele período, como apontam Nagel & Newman e da Silva, a prova de consistência significava exibir um modelo da teoria, ou seja, uma interpretação de seus termos que a torne verdadeira. Porém, a demonstração de que Hilbert sentiu a necessidade de perseguir era num sentido mais abrangente. Como os autores apontam, Hilbert havia demonstrado a consistência da geometria exibindo um modelo aritmético dos termos da teoria, mas isso apenas transferiu o problema da consistência da geometria (no caso da euclidiana e não euclidiana) para a aritmética. Assim, não bastaria uma interpretação verdadeira, mas sim que não fosse possível interpretar os termos da teoria axiomática formal em questão, de modo que conduzisse a contradições, ou seja, requisitava-se uma prova *absoluta de consistência*.[23]

Destaca-se nesse sentido, algumas dificuldades apresentadas pelos métodos comuns para se fazer tal demonstração absoluta, que, a partir da característica infinitária das teorias formalizadas em questão, torna o processo inesgotável. Diante das críticas

[21] GOMES & D'OTTAVIANO (2017, p. 298).
[22] DA SILVA (2007, p. 188).
[23] NAGEL & NEWMAN (2007, p. 31). Vide também DA SILVA (2007, p. 189).

de autores como Henri Poincaré (1854–1912) e Leopold Kronecker (1823–1891), Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) e Hermann Weyl (1885–1955), em relação ao emprego de determinadas noções, como o infinito, Hilbert espera com seu programa, apresentado pela primeira vez em 1900 em uma conferência no congresso internacional de matemáticos realizado em Paris, que essa demonstração fosse feita por métodos finitários. Uma das justificativas, pode-se apontar, segundo da Silva, está na "percepção direta" de tal análise.[24] Uma das estratégias tomadas com esse objetivo, é transferir as análises das sentenças para as regras de inferência da teoria, de modo que se pudesse checar que, de seu conjunto, não se possa deduzir sentenças contraditórias. Para isso, então, Hilbert usará uma *matemática finitária*, entendida como uma teoria mais fraca para poder representar importantes teorias matemáticas formalizadas. Isto é, como destaca da Silva, pelo caráter mais elementar dessa matemática também chamada de *primitiva*, esperava-se conseguir representar os mecanismos do sistema formal. Este processo, isto é, aos métodos e estratégias que serão utilizados para cumprir o objetivo de Hilbert, ficará conhecido como teoria da prova (*Bewistheorie*).[25] Ou seja, podemos observar, mesmo que com ressalvas, a similaridade da construção de uma teoria ou abordagem que visa possibilitar a investigação lógica, no caso de Hilbert, em um âmbito formal geral, diferente de Frege onde a formalização é empregada como um instrumento, ao invés de um fim em si mesmo. Apesar disso, ambos fazem requisitos similares em relação

[24]Frege (1884 [1974], p. 276–277). Frege também faz críticas ao formalismo: "Padece deste erro a teoria formal das frações, números negativos e complexos. Exige-se que as regras de cálculo conhecidas mantenham-se na medida do possível para os números recém-introduzidos, e derivam-se daí propriedades e relações gerais. Se em parte alguma se esbarra em contradição, a introdução dos novos números é tida como legítima, como se não obstante uma contradição não pudesse estar oculta em alguma parte, e como se a ausência de contradição já fosse existência. [...] Em suma, *esta teoria puramente formal é insuficiente. Seu valor é apenas este: demonstra-se que se operações tem certas propriedades, como a associatividade e a comutatividade, valem para ela certas proposições.* Ora, mostra-se que a adição e a multiplicação, já conhecidas, tem estas propriedades, podendo-se então formular imediatamente estas proposições a seu respeito, sem repetir por extenso a demonstração em cada caso. Apenas por meio desta aplicação a operações dadas de outro modo, são obtidas as proposições aritméticas conhecidas. Entretanto, absolutamente nada nos permite acreditar que a adição e a multiplicação possam ser introduzidas por esta via. Oferece-se apenas uma orientação para as definições, e não as próprias definições." Grifos nossos.

[25]Kneale & Kneale (1980, p. 694). Sobre aspectos do debate entre o logicismo, formalismo e intuicionismo: "As vezes chama-se formalismo à filosofia da matemática de Hilbert e tal como os formalistas do século XIX foram atacados por Frege assim também Hilbert é atacado por Brouwer em virtude de aquele não levar em consideração o *conteúdo* real da matemática. Os adversários de Frege defenderem que as novas espécies de números podiam ser introduzidas por definições criadoras e que se as definições não conduziam a contradições era inútil pedir mais provas da existência dos números. A isto Frege respondia que só se podia demonstrar a inexistência de contradições dando um exemplo e que a inferência inversa era falaciosa. Agora Hilbert argumenta que a consistência de um sistema de postulados pode ser estabelecida sem se apresentar um modelo. A isto Brouwer responde que os intuicionistas não pressupõem uma inconsistência na aplicação do princípio do terceiro excluído a conjuntos infinitos e que mesmo se Hilbert conseguisse efetivar o seu programa não teria feito nada para demonstrar a verdade das suas proposições 'ideais' porque há um círculo vicioso na tentativa de justificar a matemática formalista através de uma demonstração de consistência. É-nos pedido que aceitemos a correção de um sistema de postulados por se ter mostrado que não conduz a contradições; mas para Brouwer esta justificação não tem qualquer valor a menos que já se aceite o princípio de que a correção de uma proposição se segue do absurdo do seu absurdo e isto não é mais do que uma outra versão do princípio do terceiro excluído."

ao rigor e axiomatização, por exemplo, exigindo que o procedimento de demonstração nesse contexto seja finito. Assim, ambas abordagens expressam no seu interior uma caracterização, cada qual com seus objetivos e peculiaridades, de um aparato capaz de representar relações de consequência que são expressas em termos de *dedutibilidade*.

A noção de derivação ou prova é assim introduzida por Hilbert:

> §57. Uma prova é uma figura, que devemos ser capazes de ver como tal; consiste de inferências de acordo com o esquema
>
> $$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{G}\\ \\ \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{L}\end{array}}{\mathfrak{L}}$$
>
> onde em cada estágio cada uma das premissas – isto é, cada uma das fórmulas $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{L}$ – é um axioma ou resultados diretamente de um axioma por substituição, ou concorda com a fórmula final I de uma inferência que ocorre anteriormente na prova, ou resulta de tal fórmula final por substituição.
>
> § 58. Diz-se que uma fórmula é demonstrável se for um axioma ou resultar de um axioma por substituição ou se for a fórmula final de uma prova ou se resultar de tal fórmula final por substituição. Assim, o conceito 'demonstrável' deve ser entendido em relação ao sistema axiomático subjacente. Esse relativismo é natural e necessário; não causa dano, pois o sistema axiomático está em constante ampliação, e a estrutura formal (*Aufbau*), de acordo com nossa tendência construtiva, está sempre se tornando mais completa.
>
> § 59. Para alcançar nosso objetivo, devemos fazer das demonstrações como tais o objeto de nossa investigação; somos assim compelidos a uma espécie de teoria da prova que estuda as operações com as próprias provas. Para a teoria dos números intuitiva e concreta, que tratamos primeiro, os números eram os objetuais e os exibíveis, e as provas de teoremas sobre os números caíam no domínio do pensável. Em nossa presente investigação, a prova em si é algo concreto e exibível; as reflexões de conteúdo seguem as próprias provas, assim como o físico investiga seu aparelho e o astrônomo investiga sua localização; assim como o filósofo pratica a crítica da razão; então, em minha opinião, o matemático deve garantir seus teoremas por meio de uma crítica de suas provas e, para isso, ele precisa da teoria da prova.[26]

[26] Hilbert (1922, p. 1128). Nossa tradução. Lê-se no original: "§57. A proof is a figure, which we must be able to view as such; it consists of inferences according to the schema

$$\mathfrak{G}$$

A partir desses aspectos dos trabalhos de Frege e Hilbert, a respeito dessa abordagem, gostaríamos de ressaltar seguindo a terminologia empregada por Kneale & Kneale, que Frege faz uso do método axiomático de modo *material*, ou seja, um dos sucessos de Frege é fornecer um tratamento formal para o método axiomático, em outras palavras, ele apenas faz uso de um método axiomático por meio de um sistema formal. Diferentemente dos trabalhos de Hilbert, os quais defendem a importância de um estudo mais geral, um estudo sobre os sistemas formais.[27] Nesse sentido, fornecendo as bases da disciplina que pretendia advogar, Hilbert busca fornecer uma teoria geral dos sistemas dedutivos. A metamatemática, como foi denominada, investiga as propriedades fundamentais dos sistemas dedutivos, como por exemplo a consistência, a completude e a noção de demonstração. Nesse sentido, diferente do uso *axiomático material* introduzido por Frege, Hilbert ao teorizar sobre os aspectos gerais formais dos sistemas dedutivos, busca expressá-las, também, em axiomas. Nesse sentido, Hilbert faz um uso de uma *axiomática formal*.

A respeito da noção de demonstração, temos em Hilbert, a partir da abordagem metamatemática a tentativa de se fazer uma teoria axiomática formal de demonstração, conhecida como *teoria da prova*. Assim, Hilbert esperava que a sua teoria seja capaz de representar as relações de consequência lógica das teorias axiomáticas, apresentando, portanto, na sua teoria da prova uma caracterização metamatemática da noção de dedução.[28] Em relação ao processo de formalização, Bocheński aponta:

$$\frac{\mathfrak{G} \to \mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$$

where at each stage each of the premisses—that is, each of the formulae $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ — is either an axiom, or results directly from an axiom by substitution, or agrees with the end-formula I of an inference that occurs earlier in the proof, or results from such an end-formula by substitution. § 58. A formula is said to be provable if it is an axiom or results from an axiom by substitution or is the end-formula of a proof or results from such an end-formula by substitution. Thus the concept 'provable' is to be understood relative to the underlying axiom-system. This relativism is natural and necessary; it causes no harm, since the axiom system is constantly being extended, and the formal structure (*Aufbau*), in keeping with our constructive tendency, is always becoming more complete. § 59. To reach our goal, we must make the proofs as such the object of our investigation; we are thus compelled to a sort of proof theory which studies operations with the proofs themselves. For concrete-intuitive number theory, which we treated first, the numbers were the objectual and the displayable, and the proofs of theorems about the numbers fell into the domain of the thinkable. In our present investigation, proof itself is something concrete and displayable; the contentual reflections follow the proofs themselves just as the physicist investigates his apparatus and the astronomer investigates his location; just as the philosopher practises the critique of reason; so, in my opinion, the mathematician has to secure his theorems by a critique of his proofs, and for this he needs proof theory." Veja também: Hilbert (1923, p. 1137).

[27] Bocheński (1985, p. 300). O autor destaca as diferenças entre Boole, Frege e Hilbert: "Resulta, importante aquí, a nuestro propósito, la aguda distinción entre el cálculo formalizado – sin sentido, por lo tanto, a la manera booleiana – de una parte, y las reglas intuitivas de la inferencia, por otra. Fue Frege también el primero en formular este pensamiento, al intentar enumerar todos los 'modos de inferencia y deducción' (como distintos de los axiomas. En cambio, si bien es verdad que trata los axiomas y teoremas formalmente, no los considera, sin embargo, sin sentido. Trátase aquí, por el contrario, de signos considerados en su mera materialidad."

[28] von Plato (2014), n. p.). Vide também Beall & Restall (2019, n. p.).

> Com isso, uma nova fase foi alcançada na concepção de formalização. Claro que em Hilbert a teoria é limitada à matemática: o que ele fala é apenas de uma metamatemática. Mas muito em breve esse conceito seria estendido à Lógica, que ocorreu pela primeira vez na escola de Varsóvia. A expressão 'Metalógica', aparece pela primeira vez em 1930, em um artigo de Łukasiewicz e Tarski.[29]

As obras de Frege e Hilbert exerceram bastante influência no desenvolvimento da lógica e na teoria dos sistemas formais. A partir disso, as investigações desenvolveram-se em diversos ramos com ênfases distintas, e apesar desses dois autores perseguirem objetivos diferentes, eles partem de similaridades as quais convém que sejam consideradas. O ponto comum em questão diz respeito ao modo com que Frege e Hilbert concebem o sistema formal como sendo de capaz de expressar validamente relações de consequência lógica. Em ambos os autores a noção de consequência lógica é expressa em seus trabalhos, em termos de dedutibilidade. Como apontamos anteriormente, há uma distinção importante em relação ao nível em que essas abordagens são feitas; porém ambas pressupõem um conjunto de regras e axiomas que representarão as conexões lógico-formais entre as sentenças de um dado sistema formal.

Estudiosos como Sundholm apresentam uma síntese por meio da qual é possível observarmos a imagem geral do que é uma prova em sistemas *à la* Frege e *à la* Hilbert de modo que também podemos notar a noção de consequência sendo caracterizada.

> Dizemos que D é uma prova das premissas $\varphi_1, ..., \varphi_k$ de φ, se D é uma árvore finita das fbf[30] reguladas por *MP* [*Modus Ponens*] e com φ como a última fórmula. Todas as fórmulas anteriores de D são ou axiomas ou alguma $\varphi_1, ..., \varphi_k$. Assim, nós usamos as premissas como *se elas fossem axiomas* em uma prova dessas sentenças. Se há uma prova de φ das premissas $\varphi_1, ..., \varphi_k$ nós escrevemos:
>
> $\varphi_1, ..., \varphi_k \vdash \varphi.$
>
> Essa noção é estendida para um esquema de maneira óbvia. Nós podemos também definir a relação de consequência entre conjuntos Γ de premissas e *fbfs* possivelmente infinitas colocando:

[29]BOCHEŃSKI (1980, p. 300): "Con esto se ha alcanzado una nueva fase en la concepción de la formalización. Claro que en Hilbert la teoría queda limitada a la Matemática: de lo que él habla es sólo de una Metametemática. Pero muy pronto habría de extenderse este concepto a la Lógica, cosa que tuvo lugar primeiramente en la escuela de Varsovia. La expresión "Metalógica", aparece por primera vez en 1930, en un artículo de Łukasiewicz y Tarski."

[30]Usamos aqui a abreviação da expressão em português "fórmula bem formada", correspondente à versão inglesa de "well-formed formulae".

$$\Gamma \vdash \varphi \textit{ sse } \varphi_1, ..., \varphi_k \vdash \varphi, \textit{ para alguma } \{\varphi_1, ..., \varphi_k\} \subseteq \Gamma.$$

Por essa noção de consequência das premissas em termos de uma árvore de prova das sentenças, é possível estabelecer um dos teoremas centrais da metamatemática elementar.[31]

Não é apenas importante notar a estratégia usada para caracterizar a noção em questão, mas também, a perspectiva pré-teórica subentendida. Ou seja, quando nos voltamos a olhar o procedimento utilizado no sistema dedutivo anterior, percebemos a mesma crença de que uma legítima consequência pode ser capturada por meio de um sistema que garante a validade independente do seu conteúdo, pois está alicerçado em um aparato capaz de preservar a validade das sentenças sejam elas quais forem. Nesse sentido, o sistema de prova desses autores, e no geral, dentro da abordagem teórico dedutiva, entende que tal procedimento garante a *preservação* da validade de uma sentença para outra, se assim for permitido dentro do sistema. Essa pressuposição não é totalmente nova, sendo possível notar o mesmo em autores anteriores, com os quais baseiam suas teorias lógicas, entre outras coisas, na noção pré-teórica denominada por Asmus e Restall por *transference approach*.

Em relação a este momento dos desenvolvimentos dos estudos fundacionais matemáticos e da lógica matemática, Tarski, observando o desenvolvimento do método axiomático que caracterizamos anteriormente, destaca que com a intenção de delimitar o uso da noção intuitiva, na sua origem o método axiomático era formulado de maneira específica, ou seja, os axiomas escolhidos eram específicos da teoria em questão. A mudança importante que gostaríamos de ressaltar que o autor aponta, é o fato de que se percebeu a possibilidade de se abstrair esse conteúdo de natureza especificada, trazendo à tona características estruturais e formais dos enunciados e, a partir delas, formular axiomas também dessa natureza formal. Essa percepção é importante, como veremos, nos desenvolvimentos metamatemáticos e metalógicos os quais Tarski apresenta sua teoria do operador de consequência. Sobre essas noções-chave do método axiomático, Tarski explica, em linhas gerais, que:

[31] Sundholm (1983, p. 137). Nossa tradução. Lê-se no original: "We say that D is a proof from assumptions $\varphi_1, ..., \varphi_k$ of φ, if D is a finite tree of wffs regulated by MP and with φ as its end formula. All the top formulae of D are either axioms or one of $\varphi_1, ..., \varphi_k$. Thus, we may use the assumptions as *if they were axioms*in a proof from these assumptions. If there is a proof of φ from assumptions $\varphi_1, ..., \varphi_k$ we write:

$$\varphi_1, ..., \varphi_k \vdash \varphi.$$

This notion is extended to schemata in the obvious way. We can also define a consequence relation between possibly infinite sets Γ of assumptions and wffs by putting

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ iff } \varphi_1, ..., \varphi_k \vdash \varphi, \text{ for some } \{\varphi_1, ..., \varphi_k\} \subseteq \Gamma.$$

For this notion of consequence from assumption by means of a proof tree from the assumptions, one is able to establish one of the central theorems of elementary metamathematics".

> A título de compromisso entre o ideal inatingível e as possibilidades realizáveis, emergiam dois princípios, os quais foram subsequentemente aplicados na construção das disciplinas matemáticas. Pelo primeiro, toda disciplina começa com uma lista que consta de um pequeno número de sentenças chamadas axiomas ou sentenças primitivas, as quais parecem ser intuitivamente evidentes, sendo reconhecidas como verdadeiras sem justificação adicional. De acordo com o segundo, nenhuma outra sentença é aceita como verdadeira na disciplina a menos que estejamos aptos a demonstrá-la tendo como auxílio exclusivo os axiomas e as sentenças previamente demonstradas. Todas as sentenças que puderem ser reconhecidas como verdadeiras em virtude desses dois princípios serão chamadas teoremas ou sentenças demonstráveis da disciplina em questão. Dois princípios análogos dizem respeito ao uso de termos na construção da disciplina. Pelo primeiro deles, listamos no início uns poucos termos, chamados termos primitivos ou não definidos, que parecem ser diretamente compreensíveis e que decidimos usar (na formulação e demonstração de teoremas) sem explicar seus significados. Através do segundo princípio, concordamos em não usar quaisquer outros termos a menos que possamos explicar seus significados definindo-os com o auxílio dos termos não definidos e dos termos previamente definidos. Esses quatro princípios constituem as pedras fundamentais dos método axiomático, e as teorias desenvolvidas de acordo com eles são ditas teorias axiomáticas.[32]

A disciplina responsável por estudar tais características gerais comuns às teorias formais, é a metamatemática e o nosso objeto de pesquisa se encontra dentre os conceitos mais importantes a serem estudados por ela. Nossa pesquisa se concentra nos trabalhos tarskianos acerca das disciplinas que contém discussões pertinentes aos assuntos citados até aqui e referentes às características gerais comuns a uma teoria formalizada. A axiomatização de uma teoria formalizada, pode ser feita a partir de uma teoria específica, onde um estudo metateórico dessa teoria é feito de maneira específica, enquanto também é possível um estudo dessa natureza (metateórica) num âmbito mais geral, onde as características comuns dessas metateorias podem ser investigadas.

2.3 Operador de consequência Cn

Até agora percorremos alguns aspectos importantes nas investigações dos fundamentos da matemática e desenvolvimentos da lógica até a abordagem denominada como "metamatemática". É importante ter em mente alguns pontos que tratamos nesse

[32] TARSKI (1969 [2007], p. 224).

percurso para que possamos contextualizar melhor o que vem a seguir. Apresentamos a investigação metamatemática por meio das considerações e objetivos do que ficou conhecido como *Programa de Hilbert*. Agora convém observarmos por meios das considerações de Tarski, as quais são feitas após certo desenvolvimento das investigações metamatemáticas, e que como veremos, visam entre outras coisas, aprimorar tal campo de investigação.

Para Tarski a noção de consequência lógica constitui-se no principal objeto de estudo do que hoje é conhecido como metamatemática.[33] Esta última, pode ser entendida, de maneira geral, como uma análise de aspectos lógico-formais comuns nas disciplinas matemáticas. Tais estudos metamatemáticos têm lugar após as teorias ou disciplinas em questão passarem por um processo de *formalização* que, junto com o método axiomático, identifica-se com o desenvolvimento da própria matemática, como viemos caracterizando até aqui.

Considerando o procedimento da formalização até aqui exemplificado por meio das contribuições de Frege e Hilbert, sobretudo em relação ao rigor, como destacamos, vimos tal processo relacionado a disciplinas específicas. Porém, podemos estendê-lo a tratar de igual maneira, num âmbito ainda mais geral, no caso, sobre as próprias formalizações. Como veremos a seguir, ainda podemos dar um passo adiante e adentrarmos às noções importantes de tais disciplinas formalizadas, entendendo como podemos construí-las.

Os conceitos tarskianos que pretendemos abordar encontram-se em âmbito metamatemático geral, estando presente em trabalhos metodológicos do autor dedicados à teoria das ciências dedutivas, onde a noção de consequência será caracterizada. Desta forma, vejamos esses níveis por meio das considerações que o próprio Tarski faz em relação à metamatemática:

> Como já mencionei, em metamatemática, nos dias de hoje, nós consideramos apenas as teorias dedutivas formalizadas. Eu acredito que também sugeri que a lógica matemática tem sido agora desenvolvida até certo ponto, que nós podemos apresentar todo ramo da matemática como uma teoria formalizada. Como resultado, a variedade de teorias formalizadas é bastante extensa, e isso é de fato difícil para nós imaginarmos como elas podem ser investigadas, por exemplo, por uma disciplina uniforme única. Adequadamente, nós temos que distinguir entre metamatemática geral e especial. Na primeira nós tentamos estabelecer propriedades gerais as quais são comuns a todas teorias matemáticas, ou pelo menos, a uma classe bastante compreensiva de tais teorias, enquanto a metamatemática especial é voltada ao exame detalhado de teorias individuais. Nessa conexão, nós usamos o

[33] Tarski (1939/40 [1995], p. 159).

> termo "metateórico" para denotar aquela parte da metamatemática especial a qual lida exclusivamente com uma dada teoria matemática; por exemplo, nós falamos de meta-álgebra, metageometria, etc. Os limites entre metamatemáticas gerais e especiais, é claro, não é precisamente determinado. Há uma circunstância que tende a obliterar ainda mais esse limite, e então, facilitar enormemente a investigação de todas teorias matemáticas dentro de uma disciplina uniforme. Pois sabemos hoje que toda teoria formalizada pode ser reduzida a um tipo padrão e, consequentemente, nós podemos lidar exclusivamente com tais teorias.[34]

Partindo da premissa de que é possível formalizar uma vasta variedade de disciplinas matemáticas, isso permite que se possa, a partir disso, considerá-las de maneira ampla, e assim, extrair certos aspectos comuns da natureza formal que tais disciplinas apresentam. Uma das características comuns que pode ser enumerada como a todas elas, por exemplo, é a relação de consequência lógica, ou seja, o fato de serem todas teorias dedutivas. Assim, segundo Tarski, a partir das investigações metamatemáticas, deve-se encontrar os critérios para a construção do seu próprio objeto de estudo. Nesse sentido amplo, Tarski oferece em determinados trabalhos, uma metodologia que versa sobre a própria construção de uma teoria dedutivo formal.

É a partir desse grau de generalidade que se constitui o escopo dos trabalhos tarskianos acerca das disciplinas dedutivas formais, âmbito em que o operador de consequência é pensado para exprimir a essência de tais sistemas dedutivos, ou seja, representam a ação de dedutibilidade ou o que significa consequência. Sendo assim, faz-se necessário considerar o que deve ser entendido como uma disciplina dedutiva e principalmente a maneira como Tarski aborda tais disciplinas no que diz respeito às suas construções. Desta forma, antes de adentrarmo-nos na teoria tarskiana, convém observarmos melhor a construção das teorias que são objeto de estudo da metamatemática. Assim, nosso percurso até o operador de consequência começa por precisar

[34] Tarski (1939/40 [1995], p. 164). Nossa tradução. Lê-se no original: "As I have already mentioned, in present-day metamathematics we consider only formalized deductive theories. I believe I also suggested that mathematical logic has now been developed to such a point, that we can present every branch of mathematics as a formalized theory. As a result, the variety of formalized theories is very large, and it is indeed hard for us to imagine how they can all be investigated by means of a single uniform discipline. Accordingly, we have to distinguish between general and special metamathematics. In the first we attempt to establish general properties which are common to all mathematical theories, or at least to a very comprehensive class of such theories, while special metamathematics is devoted to thorough and detailed examinations of individual theories. In this connection we use the term metatheory to denote that part of special metamathematics which deals exclusively with a given mathematical theory; for instance, we speak of meta-algebra, metageometry, and so on. The borderline between general and special metamathematics is, of course, by no means sharply determined. And there is one circumstance that tends to obliterate still further this borderline and, therefore, to facilitate greatly the investigation of all mathematical theories within a uniform discipline. For we know today that every formalized theory can be reduced to a standard type, and consequently we may deal exclusively with theories of such a type."

melhor o que seria o *método dedutivo*.

Por meio do método e técnicas axiomático-formais, Tarski define tais propriedades importantes para tal classe ampla de sistemas dedutivos, inclusive a noção de consequência, ou seja, como, em termos axiomático-formais dentro de uma teoria dedutiva, deve ser entendida a noção de uma sentença ser consequência de outra sentença. Vejamos agora como esse conceito pode ser tratado a partir dos avanços recentes no campo da metamatemática. Tal disciplina tem como objeto de estudo as disciplinas matemáticas, ou as teorias dedutivas, mais precisamente teorias dedutivas formalizadas e, nesse sentido, compete também a essa disciplina fornecer critérios para a construção dessas teorias, as quais serão feitas pelo "método dedutivo". Tal método é responsável pela construção de uma teoria dedutiva formalizada, a qual pode ser aplicada às teorias matematizadas, o que torna a prática da metamatemática igual a qualquer disciplina matemática, diferenciando apenas de seu objeto.

> A análise e a avaliação crítica dos métodos, que se aplicam na construção das ciências dedutivas, deixaram de ser tarefa exclusiva ou mesmo principal da metodologia. A metodologia das ciências dedutivas tornou-se uma teoria geral das ciências dedutivas, em um sentido análogo àquele, em que a aritmética é a teoria dos números e a geometria é a teoria das figuras geométricas. Na metodologia contemporânea, investigamos as teorias dedutivas em sua totalidade, bem como as sentenças individuais que as constituem; consideramos os símbolos e as expressões de que tais sentenças são compostas, propriedades e conjuntos de expressões e de sentenças, relações mantidas entre elas (como a relação de consequência), e mesmo relações entre expressões e os objetos dos quais as expressões "falam sobre" (como a relação de designação); estabelecemos leis gerais que regem esses conceitos.[35]

Na matemática trabalhamos com resultados que envolvem, por exemplo equações numéricas, ou resultados geométricos. Já a metamatemática tem como objeto o estudo do que é comum a essas disciplinas, estudando os conceitos principais utilizados e suas relações, como axiomas, teoremas, conjuntos, prova, derivação etc. Essa

[35] Tarski (1941, p. 129). Nossa tradução. Lê-se no original: "The analysis and the critical evaluation of the methods, which are applied in the construction of deductive sciences, ceased to be the exclusive or even the main task of methodology. The methodology of the deductive sciences became a general theory of deductive sciences, in a sense analogous to that, in which arithmetic is the theory of numbers and geometry is the theory of geometrical figures. In contemporary methodology we investigate deductive theories in their entirety as well as individual sentences which constitute them; we consider the symbols and the expressions of which such sentences are composed, properties and sets of expressions and of sentences, relations holding among them (such as the relation of consequence), and even relations among expressions and the objects which the expressions 'talk about' (such as the relation of designation); we establish general laws which govern these concepts."

abordagem segue as ambições que surgiram na intenção de buscar uma fundamentação precisa e adequada para o saber matemático e surge com a abstração formal de teorias interpretadas, esvaziando seus significados específicos, restando apenas sua forma lógica, e sob esta então será analisada em seus aspectos mais importantes. Nesse sentido, nos estudos metamatemáticos encontram-se os métodos para construir seus próprios objetos de estudos, no caso, das teorias dedutivas formais, o método dedutivo. O método dedutivo pode ser caracterizado da seguinte maneira,

> Quando começamos a construir uma determinada disciplina, nós distinguimos, primeiro de tudo, um determinado grupo de expressões dessa disciplina que parecem para nós ser imediatamente entendíveis; as expressões desse grupo nós chamamos de TERMOS PRIMITIVOS ou TERMOS INDEFINIDOS e aplicamos eles sem explicar seus significados.[36]

Através dos termos primitivos, defini-se todas as outras expressões afirmadas na teoria e algumas dessas expressões que nos parecem possuir caráter evidente serão escolhidos como 'sentenças primitivas ou axiomas.'[37] Cumprida esta etapa, concordamos em aceitar apenas outras declarações como verdadeiras dentro de nossa teoria se, e somente se, puderem ser obtidas a partir das declarações as quais foram estabelecidas previamente, que abarcam termos primitivos e declarações primitivas que chamamos de axiomas. Toda teoria construída com o método dedutivo será então uma teoria dedutiva formalizada.

Nesse sentido, a metamatemática pode ser tratada tanto no estudo de uma teoria dedutiva específica, por exemplo, a aritmética dos números reais, geometria etc., mas, também num âmbito mais geral, a partir das características comuns ao se formalizar determinada teoria. Ou seja, pode-se tratar metamatematicamente de uma teoria dedutiva formalizada específica ou num nível mais geral, no que diz respeito as características comuns presentes em teorias construídas através do método dedutivo. Isso faz com que a metamatemática não seja uma única disciplina, explica Tarski, e para cada teoria formalizada, uma metadisciplina deverá ser construída:

> Estritamente falando, metamatemática não é para ser considerada como uma única teoria. Com o propósito de investigar cada disciplina dedutiva, uma metadisciplina especial deve ser construída.[38]

[36] Tarski (1941, p. 110). Nossa tradução. Lê-se no original: "When we set out to construct a given discipline, we distinguish, first of all, a certain small group of expressions of this discipline that seems to us to be immediately understandable; the expressions of this group we call PRIMITIVE TERMS or UNDEFINED TERMS, and, we employ them without explaining their meanings."

[37] Tarski (1930b, p. 63). Veja também Tarski (1941, p. 110–11) e Tarski (1969 [2007], p. 222–4).

[38] Tarski (1930b, p. 60). Nossa tradução. Lê-se no original: "Strictly speaking metamathematics is not to be regarded as a single theory. For the purpose of investigating each deductive discipline a special metadiscipline should be constructed."

É sob este aspecto mais geral, que Tarski investiga e faz contribuições à determinados aspectos comuns a tais metadisciplinas, a saber, noções que serão aplicadas a todos os sistemas que chamamos dedutivos. Entre as noções mais importantes, comuns às metadisciplinas, nesse sentido, encontra-se o conceito de consequência. Como veremos, a partir dessa perspectiva, a noção de sentença e consequência, serão consideradas como primitivas dentro de um sistema formal dedutivo. Assim, a noção de consequência será caracterizada apenas pelos axiomas da teoria. No artigo "On some fundamental concepto of Metamathematics", Tarski busca, a partir desse ponto de vista, fornecer uma caracterização precisa por meio do método dedutivo como mencionado acima, a respeito de uma disciplina específica, o cálculo proposicional. Em tal artigo, Tarski também ressalta que, apenas levando-se em conta uma disciplina concreta, a qual determinado sistema dedutivo representa, é que se pode obter precisamente o que significa uma consequência propriamente dita, que é possível observar apenas dentro da disciplina concreta em questão. Com efeito, explica Tarski:

> Uma definição exata dos dois conceitos, de sentença e de consequência, pode ser determinada apenas nesses ramos da metamatemática nos quais o campo de investigação é uma disciplina formalizada concreta. Por conta da generalidade das presentes considerações, contudo, tais conceitos serão aqui considerados como primitivos e serão caracterizados por meio de uma série de axiomas.[39]

Já em seu artigo "Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences", Tarski busca fornecer uma análise geral de sistemas dedutivos e declara sua intenção de tornar mais preciso conceitos comuns da metamatemática (num âmbito mais geral como citamos) e estabelecer quais conceitos dessas metadisciplinas especiais constituem-se como propriedades fundamentais dessas disciplinas, assim como seus princípios fundamentais, ou seja, o autor pretende fundamentar rigorosamente conceitos comuns importantes, pelo menos de forma mais abrangente possível, de sistemas dedutivos. Levando-se em conta os aspectos importantes envolvendo o método dedutivo na construção do objeto de estudo da metamatemática, em relação às investigações das metadisciplinas especiais, vejamos a abordagem de Tarski em relação a generalidade de tais estudos, os quais, nesse sentido, intentam abarcar uma classe ampla de sistemas dedutivos e que, entre outros conceitos importantes, encontra-se a noção de consequência.

[39] Tarski (1930a, p. 30–1). Nossa tradução. Lê-se no original: "An exact definition of the two concepts, of sentence and of consequence, can be given only in those branches of metamathematics in which the field of investigation is a concrete formalized discipline. On account of the generality of the present considerations, however, these concepts will here be regarded as primitive and will be characterized by means of a series of axioms."

É possível observar, nesse sentido, certo aspecto metodológico abrangente desse último artigo, onde Tarski começa apresentando o objeto de estudo da metodologia das ciências dedutivas que são, como já vimos, as disciplinas dedutivas. Na sequência, ele define melhor quais são os tipos de disciplinas dedutivas que poderão ser estudadas, visto que não são todas que se apresentam de tal forma que sejam passíveis de uma investigação rigorosa. Assim, as disciplinas que não apresentam um alicerce lógico definido, regras de inferência ou teoremas os quais são ambíguos e termos inexatos da linguagem ordinária, não poderão ser estudados pela metodologia, da qual os princípios fundamentais serão definidos a seguir. Desta maneira, apenas as teorias devidamente formalizadas e construídas pelo método dedutivo poderão ser assim analisadas.

Em seguida, Tarski destaca que a metamatemática não deve ser considerada como uma única teoria, e apesar de ser possível construir uma metadisciplina para cada disciplina dedutiva, é possível construir uma metadisciplina em um sentido geral, que abarca todas as características comuns das disciplinas dedutivas:

> Seu objetivo é tornar preciso o significado de uma série de importantes conceitos metamatemáticos os quais são comuns para metadisciplinas especiais, e estabelecer as propriedades fundamentais desses conceitos. Um resultado dessa abordagem é que alguns conceitos os quais podem ser definidos sob as bases de metadisciplinas especiais será aqui considerado como conceitos primitivos e caracterizados por uma série de axiomas.[40]

Dessarte, Tarski também destaca que para se obter uma prova exata dos resultados que se seguirão, é necessário uma lógica geral de base, a qual, no caso, entende-se como sendo capaz de regimentar tal teoria, uma simples lógica proposicional. Então, ele introduz a notação que será usada para a apresentação de sua teoria.

> Os resultados do presente artigo – destaca Tarski – são arbitrariamente aplicáveis em qualquer disciplina dedutiva e, em particular, ao cálculo proposicional. ([...] todas as sentenças válidas do cálculo proposicional podem ser usadas como premissas e todos os raciocínios dentro dessas disciplinas dedutivas).[41]

[40] TARSKI (1930b, p. 60). Nossa tradução. Lê-se no original: "Their aim is to make precise the meaning of a series of important metamathematical concepts which are common to the special metadisciplines, and to establish the fundamental properties of these concepts. One result of this approach is that some concepts which can be defined on the basis of special metadisciplines will here be regarded as primitive concepts and characterized by a series of axioms."

[41] TARSKI (1930b, p. 61–62). Nossa tradução. Lê-se no original: "The results of the presente artile are applicable to arbitrary deductive disciplines, and in particuar to the simplest deductive discipline, the sentential calculus. ([...] all the valid statements of the sentential calculus can be used as premisses in all reasoning within these deductive disciplines)."

Concluindo sua apresentação, Tarski faz questão de ressaltar que em nenhum procedimento da discussão do artigo é pressuposta qualquer teoria filosófica acerca dos fundamentos da matemática, a não ser o que ele destaca a partir de escritos de Leśniewski, o que chama de um formalismo intuicionista.

Sobre a explicação da notação que será utilizada por Tarski para introduzir sua teoria e os resultados por ela obtidos, explicaremos aqui apenas os que são usados para expressar seu sistema axiomático. São eles: S deve ser entendido como representando a classe de todas as sentenças da linguagem em questão; $\bar{\bar{S}}$ as duas barras superiores são usadas para denotar sua cardinalidade; & representa uma conjunção; $\aleph_0$ denota um conjunto para o qual apresenta uma função bijetora, ou seja, uma relação um-para-um com o conjunto dos números naturais, ou seja, significa entre, outras coisas, que a cardinalidade do conjunto deve ser entendida como sendo infinita e enumerável; $\leqslant$ é um símbolo de comparação que denota a relação de ser menor ou igual; S,X, Y... representam conjuntos de objetos, no caso, sentenças; Σ este símbolo representa uma somatória, a qual é feita a partir do valor do índice que se encontra na parte inferior até um valor limite indicado na parte superior. No caso, Tarski apenas preenche o índice.

Desta maneira, levando-se em consideração o grau de generalidade pretendido em sua abordagem, a noção de consequência deverá ser considerada como primitiva, e suas características só poderão ser observadas, segundo Tarski, por meio de axiomas formulados com a preocupação de trazer rigor e abarcar a pretensa generalidade em relação ao que foi mencionado anteriormente. Assim, de modo axiomático, a noção de consequência para um sistema dedutivo geral é introduzida por meio de um operador sobre um conjunto (X) de sentenças, $Cn(X)$, que denota as consequências do conjunto (X), como se segue:

Axioma 1. $\bar{\bar{S}} \leqslant \aleph_0$.

Axioma 2. $Se\, X \subseteq S$, então $X \subseteq Cn(X) \subseteq S$.

Axioma 3. $Se\, X \subseteq S$, então $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$.

Axioma 4. $Se\, X \subseteq S$, então $Cn(X) = \sum_{Y \subseteq X \,\&\, \bar{\bar{Y}} < \aleph_0} Cn(Y)$.[42]

O axioma 1 diz respeito ao escopo do sistema formal em questão, e que Tarski coloca como sendo uma questão praticamente óbvia. Tal axioma diz que a cardinalidade de S é menor ou igual à $\aleph_0$. Isso significa que o conteúdo ou o número de sentenças contidas em S deve ser enumerável, pois o objetivo é que seja possível delimitar precisamente as consequências de S e se tal conjunto for infinito não enumerável, implicaria complicações nos procedimentos de prova e, por conseguinte, na definição de consequência e seus corolários. O axioma 2 pode ser lido como, se o conjunto X é

[42] Tarski (1930b, p. 63–64).

subconjunto de S, então X é subconjunto das consequências de X que são subconjunto de S. Esse axioma caracteriza que para toda sentença que pertença a determinado conjunto, deve ser considerado como consequência de tal conjunto e todas as suas consequências são sentenças de S. O axioma 3 pode ser lido como: se X é subconjunto de S, então as consequências das consequências do conjunto X também são consequências do conjunto A. Por fim, o axioma 4 diz respeito ao fato de que em disciplinas concretas, as consequências de um conjunto de sentenças operam sobre um número finito de sentenças, delimitadas pela disciplina em questão. Assim, por exemplo, toda consequência de conjunto X é uma consequência de um subconjunto de X. Tal axioma também pode ser expresso da seguinte forma:

Se $A \subseteq S$, então $Cn(A) = \cup \{Cn(X)\colon X$ é um subconjunto finito de $A\}$.

A partir desses axiomas, Tarski prova uma série de teoremas que expressam outras propriedades importantes dos sistemas dedutivos e sobre o operador de consequência. Por exemplo, por meio do Teorema 1.(a) que enuncia: Se $A \subseteq B \subseteq S$, então $Cn(A) \subseteq Cn(B)$, é possível observar que o operador Cn no domínio do conjunto de sentenças é *monotônico*, propriedade que pode ser expressa das seguintes formas:

$\sum Cn(X) \subseteq Cn\Big(\sum\limits_{X \in \mathfrak{R}} X\Big)$, ou

$Cn\Big(\prod\limits_{X \in \mathfrak{R}} X\Big) \subseteq \prod\limits_{X \in \mathfrak{R}} Cn(X)$, para toda classe não-vazia $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(S)$.[43]

Atualmente, é comum apresentar o operador de consequência através das seguintes propriedades relacionais dentro de um sistema dedutivo fechado por regras de inferência e escopo delimitado:

Reflexividade: Se $A \in X$, então $X \vdash A$.

Transitividade: Se $Y \vdash C$ e $X \cup \{C\} \vdash A$, então $X \cup Y \vdash C$.

Monotonicidade: Se $X \vdash A$ e $X \subseteq Y$, então $Y \vdash A$.

A *reflexividade* é uma propriedade relacional a qual determina que qualquer elemento pertencente a um determinado conjunto é dele uma consequência. Ou seja, é consequência do conjunto ao qual pertence. A propriedade de *transitividade* de uma relação, no geral, indica uma conexão entre três elementos, de modo que, em uma sequência ordenada, por exemplo, A, B e C, o último elemento acha-se relacionado com o primeiro por intermédio do segundo. Aplicando essa noção no âmbito das consequências, significa dizer que, as consequências das consequências de um determinado conjunto X são também consequências de X. Já a propriedade de *monotonicidade* garante

[43] Tarski (1930b, p. 64–65).

que, diante um elemento considerado como consequência de um dado conjunto, este fato não deverá ser alterado mesmo que sejam adicionados novos elementos a este conjunto. No caso das consequências, em se tratando de uma elemento que é consequência de um conjunto de premissas, tal elemento permanece como uma consequência, mesmo que sejam adicionadas novas premissas ao conjunto ao qual pertence.

Por meio de sua teoria, Tarski fornece um modo bastante preciso para se tratar a noção de consequência, diferente dos autores anteriores, como Frege e até mesmo Hilbert, que pretendeu tratar de noções num âmbito bastante geral, apresentam um tratamento da noção de consequência apenas de uma *relação* de um conjunto de premissas com uma conclusão. Podemos considerar que, além de trazer clareza para importantes conceitos da metamatemática, o trabalho de Tarski, ao lançar-se numa investigação mais geral e, por isso, elementar, inova ao especificar as propriedades que uma relação de consequência deve apresentar, segundo as considerações que percorremos até aqui.

Deste modo, retomando o sistema dedutivo no estilo Frege-Hilbert apresentado por Sundholm na seção anterior, podemos contrastar dois modos de trabalhar a noção de consequência lógica. Uma definição em termos de relação,

$\Gamma \vdash \varphi$ iff $\varphi_1, ..., \varphi_k \vdash \varphi$, para alguma $\{\varphi_1, ..., \varphi_k\} \subseteq \Gamma$.

E a partir das propriedades (i) reflexividade, (ii) transitividade e (iii) monotonicidade, é possível definir de forma mais rigorosa uma relação de consequência, e formulá-la em termos de uma *função*[44]:

> Um operador de consequência sobre E é uma função $C : \wp(E) \longrightarrow \wp(E)$ tal que, para todo $A, B \subseteq E$
>
> *(i)* $A \subseteq C(A)$.
>
> *(ii)* $A \subseteq B \Longrightarrow C(A) \subseteq C(B)$.
>
> *(iii)* $C(C(A)) \subseteq C(A)$.[45]

Vimos até aqui alguns pontos históricos que consideramos serem relevantes para o contexto onde o operador de consequência proposto por Tarski é desenvolvido. A tradição que buscamos evocar, em um sentido geral, é a qual podemos identificar, como Asmus e Restall (2012) apontam, entre as teorias que praticam uma pressuposição teórica denominada pelos autores como "abordagem por transferência". Os métodos introduzidos desde Frege, Hilbert e Tarski são desenvolvidos buscando caracterizar a

[44]Uma *função* pode ser definida da seguinte maneira: sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Uma função de A em B, denotada por $f\colon A \longrightarrow B$, é uma terna (f, A, B), onde f é uma relação de A em B satisfazendo as seguintes condições: *a)* $Dom(f) = A$, ou seja, para qualquer x em A, existe y em B tal que (x, y) está em f. *b)* Se $f(x) = y$ e $f(x) = z$, então $y = z$.

[45]Para mais detalhes, recomendamos o artigo "Operadores de consequência e relações de consequência" de Feitosa, Moreira & Soares (2016).

relação que uma conclusão pode ser entendida como consequência de premissas. No entanto, cada autor aborda essa caracterização em níveis diferentes. Podemos então considerar, de um ponto de vista mais recente na história da lógica, que os trabalhos de tais autores, caracterizaram a abordagem por transferência em termos matemáticos e formais, a partir dos quais, diversas questões foram exploradas, e que resultaram, num sentido direto e indireto, nos aparatos lógicos-formais que alavancaram os estudos na área, de suas épocas, até os dias atuais.

A introdução do operador *Cn* é sem dúvida uma caracterização mais geral do que foi apresentado pelos autores citados anteriormente, pois por ser desenvolvida num âmbito metamatemático geral, é capaz de representar, em certo sentido, o "espírito" dedutivo nos sistemas formais. Esse alcance, mostra-se ainda mais importante, se considerarmos a relevância e aplicabilidade de tais sistemas em diversas disciplinas, sobretudo às disciplinas matemáticas. As formulações de uma relação de consequência que investigamos em autores como Frege e Hilbert, apesar de serem rigorosas e almejarem certa generalidade, não se igualam à caracterização presente no operador de consequência. Isso porque Tarski foi o primeiro autor que forneceu aspectos estritamente axiomáticos que exprimem o que significa dizer que uma sentença é consequência de um conjunto de sentenças e, portanto, preciosos para a prática matemática da época. Como veremos na próxima seção, nas palavras do próprio Tarski, o mesmo motivo pelo qual o método dedutivo pareceu triunfar, é o mesmo que conduzirá a novos problemas. Além disso, Asmus e Restall destacam que há a possibilidade de teorias apresentarem certo hibridismo de pressuposições teóricas. Assim, apesar do operador tarskiano ser classificado como pertencente também a tradição baseada na abordagem por transferência, podemos também nos perguntar: ao fornecer aspectos axiomáticos da relação de consequência, ou seja, características formais gerais, poderíamos pensar na teoria de Tarski como praticante também de outra abordagem pré-teórica, denominada de "abordagem por propriedades"? A generalidade empreendida por Tarski nos leva ao questionamento sobre as características semânticas que o operador possa a vir expressar.

Um dos possíveis caminhos que se pode desenvolver a questão anterior, é se avaliarmos o operador *Cn* por uma perspectiva semântica. Isso significa, entre outras coisas, pensarmos a formulação do operador de consequência tarskiano de forma modelo-teorética em relação aos sistemas formais que desenvolvem alguma noção de dedução. Assim, se levarmos em conta que os sistemas de prova como os no estilo Hilbert-Frege podem ser traduzidos na perspectiva do operador, ou seja, são contemplados pelos axiomas fornecidos por Tarski en 1930, veremos que, por mais que a teoria de Tarski seja formulada em âmbito sintático estrutural, ao fazer isso de maneira bastante geral, acaba por fornecer propriedades que podem ser usadas para caracterizar uma noção generalizada do que significa uma dedução. Porém, diante disso, podemos nos perguntar se Tarski está fornecendo axiomas para uma teoria da prova, como coloca Béziau:

> Pode-se dizer que Tarski estava, nesse sentido, axiomatizando sistemas de prova axiomática. É muito importante, no entanto, compreender a diferença entre as duas ocorrências da palavra axioma aqui. Os axiomas de Tarski não são axiomas de um sistema de prova, embora possam ser considerados como tal, em um nível mais complexo. Em vez disso, devemos considerar esses axiomas como *modelo-teorético*, como definindo uma certa classe de estruturas.[46]

Assim, como bem observa Béziau, o operador pode ser usado para axiomatizar a noção de consequência lógica em termos de modelo, podendo-se obter importantes resultados, como correção e completude, evidenciando que sua ampla generalidade contempla também a contraparte semântica do sistema. Em relação a abordagem da teoria da prova como apresentada no sistema hilbertiano, Béziau destaca que qualquer noção de dedução apresentada em sistemas correlatos pode ser caracterizada pelos axiomas do operador Cn. Porém, o autor também questiona se a noção de consequência formulada pelo operador, pode ser expressada em termos de teoria da prova, ou seja, se há uma equivalência entre as duas noções ali representadas. Segundo Béziau, essa questão tem uma resposta negativa, basta observarmos que existem algumas teorias que o operador Cn é capaz de contemplar, mas que não podem ser definidas em termos de teoria da prova, como lógicas de segunda ordem. Isso se deve ao fato de meta–resultados como compacidade e finitude, apesar de serem equivalentes em alguns casos como na lógica clássica, no geral, além de não serem resultados equivalentes, não podem ser expressos à maneira de Hilbert.

Além do que foi apresentado acima, a teoria do operador de Tarski inspirou novas questões, em parte, devidas a sua generalidade, por exemplo, investigações sobre uma teoria geral das lógicas, em particular, uma *lógica universal*. Essa perspectiva começa a ganhar relevância junto ao desenvolvimento de uma álgebra universal e da algebrização da lógica. Os principais pontos desse programa de pesquisa são destacados por Jean--Yves Béziau em seu artigo "From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic" [Do Operador de Consequência à Lógica Universal: Uma investigação da lógica Abstrata Geral] de 2005. Em tal artigo, Béziau percorre algumas das principais abordagens que tratam de uma certa generalidade dos estudo da lógica, perpassando pela teoria do operador Cn, matrizes lógicas, sistemas de composição de

[46]Béziau (2005, p. 4.). Nossa tradução. Lê-se no original: "One could say that Tarski was in this sense axiomatizing axiomatic proof systems. It is very important however to understand the difference between the two occurrences of the word axiom here. Tarski's axioms are not axioms of a proof system, although they can be considered as such, at a more complex level. One should rather consider these axioms *model-theoretically*, as defining a certain class of structures."

Hertz, lógica abstrata de Suszko, lógica algébrica, teoria da valoração de da Costa e a lógica universal. Segundo o autor, a teoria do operador de consequência, juntamente à teoria de matrizes lógicas, formam o cerne do que ficou conhecida como lógica polonesa, abordagem que prevaleceu nos estudos de lógica nos anos 1930 na Polônia. Entre as teorias desenvolvidas, destaca-se o método Lindebaum-Tarski de algebrização de sistemas lógicos.

Desta maneira, o operador tarskiano junto ao seu objetivo e sua fundamentação, consolida-se como uma abordagem não apenas metamatemática, mas metodológica na construção de disciplinas dedutivas. No próximo capítulo, procuramos mostrar que a tradição teórico dedutiva, a qual o sistema de Hilbert acha-se localizado, enfrenta alguns limites diante questões envolvendo resultados como a completude da matemática, e que no geral, motiva Tarski a formular uma noção de consequência capaz de evitar tais dificuldades. Porém, vimos que há diversos aspectos que mostram a abrangência caracterizada pelos axiomas de Tarski que permitem importantes resultados em lógica, como compacidade e completude.

Capítulo 3

A noção de consequência lógica em termos semânticos

Neste capítulo pretende-se expor os principais pontos acerca da definição de consequência lógica proposta por Tarski, a partir das motivações e questões apontadas no artigo de 1936 do autor, onde o mesmo apresenta um roteiro crítico de dificuldades e alternativas teóricas possíveis que buscam representar de maneira adequada a noção de consequência lógica. Como vimos no capítulo anterior, tentamos perpassar por aspectos importantes do ponto de vista histórico e teórico que caracterizam no geral o desenvolvimento das ciências dedutivas. Destacou-se, principalmente, os esforços de conceitualizar, do ponto de vista formal, a noção de consequência, em termos de dedução e, como vimos, as estratégias utilizadas são, naturalmente, baseadas em instrumentos teórico-dedutivos como, por exemplo, o método dedutivo. Essa abordagem, marca essencialmente a prática a qual, como mostraremos a seguir, Tarski pretende por um lado contrapor-se e, por outro, suplementar, visando uma caracterização precisa que represente a noção ordinária ou intuitiva de consequência lógica.

Um dos pontos de partida de Tarski no artigo de 1936 é o pressuposto de que, segundo o autor, os lógicos e matemáticos, a partir dos avanços das técnicas no desenvolvimento de sistemas formais dedutivos, acharam que a noção de consequência estava devidamente formalizada, no sentido de ali encerrar o conceito comum de consequência lógica.

> Mesmo até pouco tempo, muitos lógicos acreditavam ter conseguido, por meio de um estoque relativamente pobre de conceitos, apreender quase com exatidão o conteúdo do conceito comum de consequência ou, então, definir um novo conceito que coincida em extensão com o comum. Tal crença poderia facilmente surgir entre os novos resultados da metodologia das ciências dedutivas. Graças ao progresso da lógica matemática, aprendemos, durante o decurso de décadas recentes, como apresentar disciplinas

> matemáticas nos moldes de teorias dedutivas formalizadas. [...] Os lógicos pensaram que essas poucas regras de inferência esgotavam o conteúdo do conceito de consequência.[1]

Um dos aspectos interessantes inicialmente abordados na citação acima, é que há a introdução de uma problematização em relação aos métodos dedutivo-formais, aos quais, não obstante, Tarski dedicou diversos artigos que contribuíram de modo relevante para o desenvolvimento das ciências dedutivas, por exemplo, os artigos de 1930 onde define axiomaticamente a noção de consequência para uma classe abrangente de sistemas dedutivos.[2] Apesar deste fato, podemos notar em trabalhos posteriores a estes, e anteriores à 1936, alguns ponderamentos por parte do autor em relação aos limites dessas caracterizações.

Neste sentido, nota-se certo desenvolvimento no pensamento de Tarski ao observarmos que diversas constatações e exemplos mobilizados no artigo de 1936, já aparecem na forma de reflexões em investigações sobre sistemas formais. Um dos intentos deste capítulo é relacionar aspectos importantes de resultados obtidos por Tarski em seus estudos sobre sistemas dedutivo-formais e, de certa maneira, algumas reflexões sobre tais resultados, que parecem servir de base para o autor em sua notória teoria sobre consequência lógica.

A partir dessa perspectiva, podemos enumerar dois principais elementos presentes no plano de fundo da teoria apresentada no artigo de 1936. Um deles diz respeito ao impacto que os trabalhos de Gödel tiveram nos estudos dos fundamentos da matemática, principalmente se tratando de sistemas dedutivos formais, do qual Tarski prontamente percebe suas implicações. O segundo ponto é relacionado aos desenvolvimentos da semântica formal, e o projeto de Tarski para uma semântica cientifica, que se faz possível principalmente após o artigo "Sobre a noção de verdade em linguagens formalizadas" de 1933. O primeiro ponto acima diz respeito aos resultados que demonstraram que a caracterização da noção de consequência em termos de dedutibilidade, não coincide extensivamente com a do uso comum, o que motiva a busca por uma nova maneira de representar o conceito de consequência lógica. O segundo ponto diz respeito às principais estratégias que serão adotadas para ultrapassar as limitações das técnicas formais, ou seja, as ferramentas teóricas recentemente desenvolvidas no campo da semântica, as quais, de acordo com Tarski, possibilitarão uma definição de consequência adequada ao uso ordinário.

[1] Tarski (1936 [2007], p. 235-236).

[2] Vide a sessão 2.1, p. 44.

3.1 Limitações do Método dedutivo

Iniciamos nossa análise a partir do exemplo introduzido por Tarski em seu artigo de 1936 para iniciar a problemática que o motiva. O exemplo trata-se de um esquema que representa certa peculiaridade das teorias ω-incompletas. A partir delas, Tarski chama atenção ao seguinte fato: teorias com tal peculiaridade, apresentam casos de certas sentenças de cunho geral, as quais, a partir das regras de inferência aceitas (ou seja, do ponto de vista do método dedutivo como viemos expondo até aqui), por mais que sejam precedidas de sentenças (premissas) verdadeiras, não podemos concluir determinada sentença geral.

> A_0. 0 *possui uma dada propriedade* P,
>
> A_1. 1 *possui uma dada propriedade* P,
>
> e, em geral, toda sentença particular da forma
>
> A_n. *n possui uma dada propriedade* P,
>
> em que '*n*' indica qualquer símbolo que denote um número natural em um dado sistema numérico (por exemplo, decimal). Por outro lado, a sentença universal:
>
> A. *Todo número natural possui uma dada propriedade P,*
>
> não pode ser provada com base na teoria em questão por meio das regras normais de inferência.[3]

Apesar do termo ω-consistência ter sido cunhado por Gödel, segundo notas bibliográficas fornecidas pelo próprio Tarski, nota-se que as peculiaridades de teorias posteriormente chamadas de ω-incompletas já se apresentam de alguma maneira em palestras como "Remarks on some notions of the methodology of the deductive sciences" proferidas 1927, na *Segunda Conferência da Sociedade Polonesa de Filosofia* em Varsóvia, em que Tarski já aponta a importância de determinados conceitos que serão investigados posteriormente no artigo "On some remarsks about ω-consistency and ω-completeness" de 1931, artigo o qual é citado em nota ao final do trecho citado acima.

Assim como no artigo de 1936, Tarski após destacar a ideia apresentada na primeira citação deste capítulo, dá continuidade em sua reflexão, chamando a atenção para a existência de teorias chamadas de ω-incompletas, termo cunhado por Gödel em suas investigações sobre consistência e completude no artigo de 1931, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* [Sobre proposições indecidíveis do Principia Matemática e sistemas formais relacionados].

[3] Tarski (1936 [2007], p. 236–237).

Em termos gerais, uma teoria ω-incompleta expressa o fato de um determinado conjunto de sentenças (A_1,..., A_n) para as quais não é possível construir uma prova de completude em termos finitários, comumente requeridos em demonstrações matemáticas, e um dos aspectos essenciais do programa original de Hilbert. Para Tarski, tais teorias apresentam, do ponto de vista do método dedutivo, uma intrínseca característica que impossibilita a ocorrência de conclusões que, do ponto de vista intuitivo, deveriam ser consideradas como legítimas consequências lógicas. Essa impossibilidade acontece, em parte, devido à natureza infinita de tais teorias, o que pelos moldes comuns do método dedutivo como, por exemplo, o requisito de um procedimento finitário, impede que determinadas sentenças gerais, sejam provadas a partir de um conjunto de premissas potencialmente infinitas, o que é uma característica presente em teorias onde é permitida a aplicação de regras de indução infinita. Essa dificuldade já é destacada no artigo de 1931 do autor, onde Tarski apresenta um exemplo em notações formais mais complexas, em que exibe um caso onde intuitivamente somos levados a concluir uma sentença a qual, do ponto de vista do método dedutivo usual, não estamos autorizados.[4]

O fato a se destacar é que, já ao final do artigo de 1931, o autor disserta, do ponto de vista formal que as teorias ω-incompletas apresentam um aspecto tal que lança dúvidas sobre as caracterizações de consequência em termos dedutivos, no sentido de representar certa generalidade implícita no uso da noção de consequência lógica. A reflexão de Tarski, nesse momento, parece gerar a intuição da qual parte sua teoria sobre a consequência lógica, anos mais tarde. No artigo de 1936, Tarski começa chamando a atenção ao fato de que os estudiosos acreditaram que os métodos dedutivos eram capazes de representar adequadamente a noção de consequência lógica.[5] Essa constatação já pode ser notada e, de certa forma, mais detalhada, ao final do artigo de 1931, onde Tarski destaca que o recente avanço das técnicas do método dedutivo nos direciona à crença de que seja possível a eliminação por completo, a partir da noção de consistência, da possibilidade de determinado sistema formal dedutivo conduzir à falsidades. Como Murawski destaca, até o tempo de Hilbert e Gödel, não havia uma separação entre a noção de demonstração formal e verdade (matemática), sendo o método de demonstração (axiomático-dedutivo) o único método nas investigações matemáticas para atestar a veracidade de determinada sentença.[6] Ou seja, provar a consistência de determinado sistema, consequentemente demonstra-se que tal sistema somente nos leva a sentenças verdadeiras. Assim, uma vez que o aparato dedutivo conduza de sentenças verdadeiras para apenas sentenças verdadeiras, poderíamos as-

[4] Tarski (1931, p. 294).

[5] Vide a primeira citação deste capítulo.

[6] Murawski (2020, p. 13–14): "Gödel wrote in a letter of 7th March 1968 to Hao Wang [cf. 29, p. 10]: '[...] formalists considered formal demonstrability to be an analysis of the concept of mathematical truth and, therefore were of course not in a position to distinguish the two.' "

sumir que o conceito de consequência, formalizado em tais sistemas dedutivos, fosse coextensivo com seu uso comum ou intuitivo, como podemos notar no trecho a seguir:

> Os fatos aqui apresentados são dignos de nota por muitas razões. Anteriormente, poderia ser assumido que o conceito formalizado de consequência coincide em extensão com aquele conceito na linguagem cotidiana, ou pelo menos que todas as operações puramente estruturais, que conduzem incondicionalmente de afirmações verdadeiras a afirmações verdadeiras, poderiam ser reduzidas sem exceção às regras de inferência empregadas nas disciplinas dedutivas. Também se pode pensar que a consistência de um sistema dedutivo é em si uma garantia suficiente contra o aparecimento de enunciados no sistema que – por causa de suas relações estruturais mútuas – não podem ser ambos verdade.[7]

Essa passagem parece ilustrar, de certa maneira, a ambiência que o método dedutivo se encontrava, ou pelo menos, aspectos importantes que podem ter causado a sensação de êxito que os lógicos e matemáticos foram tomados, isto é, devido aos avanços das técnicas formais nos estudos de sistemas dedutivos. Porém, a partir dos trabalhos do lógico austríaco Kurt Gödel, especialmente o artigo publicado em 1931, mostrou-se que determinados sistemas axiomático-dedutivos, encontram certas limitações no manuseio da noção de verdade, que até então coincidia com o da noção de demonstrabilidade. Tarski certamente estava ciente dos resultados de Gödel e soube muito bem perceber a aplicabilidade de seus métodos e suas implicações, entre as quais encontram-se suas notórias teoria da verdade e consequência lógica. Desta forma, Tarski percebe que os teoremas da incompletude revelam de maneira geral as limitações do método dedutivo em trabalhar com a noção de verdade, pois sendo tal método caracterizado de maneira finitária e a noção de verdade ser de uma natureza infinita, somos levados a questionar se o método dedutivo é capaz de fornecer uma demonstração para todas as verdades da teoria. Em um artigo de divulgação publicado em 1969, intitulado *Truth and Proof* [Verdade e demonstração], é possível observar tal questão bem formulada nas palavras de Tarski:

> [. . .] a demonstração formal, assim como a antiga demonstração intuitiva, é um procedimento que objetiva a obtenção de novas sentenças verdadeiras. Tal procedimento somente será adequado se todas as sentenças obtidas

[7] TARSKI (1931, p. 294). Nossa tradução. Lê-se no original: "The facts here brought forward are noteworthy for many reasons. Formerly it could be assumed that the formalized concept of consequence coincides in extension with that concept in everyday language, or at least that all purely structural operations, which unconditionally lead from true statements to true statements, could be reduced without exception to the rules of inference employed in the deductive disciplines. Its might also be thought that the consistency of a deductive system is in itself a sufficient guarantee against the appearance of statements in the system which – on account of their mutual structural relations – cannot both be true."

> com seu auxílio mostrarem-se verdadeiras e se todas as sentenças verdadeiras puderem ser obtidas com seu auxílio. Daqui surge, naturalmente, um problema: é a demonstração formal realmente um procedimento adequado para a obtenção da verdade? Em outras palavras: o conjunto de todas as sentenças (formalmente) demonstráveis coincide com o conjunto de todas as sentenças verdadeiras?[8]

Os teoremas da incompletude de Gödel acabaram por mostrar o descompasso de tais conceitos sob o ponto de vista das teorias axiomático-dedutivas. Antes de apresentarmos os pontos de relação entre as intenções de Tarski e os resultados dos teoremas da incompletude, é importante que se tenha em mente os conceitos que estão em jogo. Vimos até aqui que Tarski aponta a noção de consequência em termos de dedutibilidade, ou seja, pelo método dedutivo, como sendo não coextensiva com a do uso comum. Temos então aqui a questão sobre se o aparato técnico e conceitual do método dedutivo é capaz de representar o conceito intuitivo ou comum de consequência e o que Tarski quer dizer com "o uso comum" ou "intuitivo" desta noção. Seguindo a exposição argumentativa de Tarski, em 1936, vejamos como a primeira questão é observada pela perspectiva do autor em relação aos teoremas da incompletude.

A demonstração dos teoremas de Gödel utilizam uma técnica inovadora bastante complexa a qual não pode ser exposta em poucas linhas. Assim, pretendemos fazer apenas uma apresentação geral da essência dos resultados. Mas antes, convém fazer algumas considerações históricas. Como viemos delineando no Capítulo 2 desta dissertação, os desenvolvimentos da lógica e dos fundamentos da matemática acham-se profundamente relacionados no século XIX e começo do XX. As ferramentas desenvolvidas nessas investigações possibilitaram um rigor e clareza sem precedentes, e a partir disso, novas áreas de investigações surgiram, entre elas, a metamatemática. Do ponto de vista da lógica, o trabalho de Alfred North Whitehead (1861–1947) e Bertrand Russell (1870–1972) que culmina com a publicação do *Principia Matemática* consolida-se de certa maneira como um sistema axiomático-dedutivo muito bem sucedido no sentido de ser rigoroso e expressivo. O sistema do *Principia* passa a ser utilizado em diversas investigações, inclusive em metamatemática. Assim, novas questões puderam ser estudadas e os fundamentos da matemática tiveram seus estudos concentrados, do ponto de vista formal, nos problemas enumerados pelo programa original de Hilbert, em especial, a prova de que toda a aritmética formal (formalizada, ou seja, como uma disciplina axiomático-dedutiva) fosse consistente. Gödel oferecerá em 1931, uma resposta negativa para as pretensões hilbertianas, pela primeira vez, com uma prova da impossibilidade da demonstração desta questão. Vejamos alguns pontos de como esse resultado e outras implicações do trabalho do lógico austríaco são obtidos e suas

[8] Tarski (1969 [2007], p. 227–228).

relações com os objetivos de Tarski.

A partir da ideia de que é possível construir um "mapeamento" da matemática, tendo como modelo a construção do paradoxo de Richard (mas evitando o aspecto falacioso da construção), Gödel criou um sistema que permite codificar todo o sistema do *Principia Matematica*, o qual é capaz de representar toda a aritmética. Assim, tal sistema permite que se assinale todos os símbolos, sentenças com uma variável livre e até demonstrações inteiras, com um único nome, chamado de *número de Gödel*. Pode-se então a partir disso, operar aritmeticamente as sentenças do *Principia matemática*, as quais, por sua vez, dizem respeito a enunciados sobre a matemática, ou seja, enunciados metamatemáticos. Com esse aparato, segundo da Silva, Gödel faz com que que a aritmética fale de si mesma.

> Gödel criou um método bastante engenhoso para se associar, de modo mecânico, números naturais às expressões e demonstrações da aritmética, de modo tal que enunciados meta-aritméticos (isto é, sobre a aritmética, no contexto da metateoria) eram "traduzíveis" em enunciados aritméticos. Desse modo, a aritmética podia "falar" de si própria. Por exemplo, o enunciado "a aritmética é consistente" é traduzido numa asserção sobre números naturais – um pouco artificial e elaborada, mas ainda assim, uma legítima asserção aritmética.[9]

Desta maneira, podemos construir de modo aritmético, sentenças que fazem afirmações sobre a própria aritmética (lembremos que o sistema de Gödel codifica um sistema formal capaz de representar a aritmética). Nesse sentido, pode-se dar uma interpretação aritmética de enunciados metamatemáticos. Por exemplo, podemos investigar a relação aritmética entre os números de Gödel de cada fórmula presente no enunciado "existe uma demonstração x para a sentença y", que pode ser escrita dentro do *Principia* como um predicado binário, $Dem(x, y)$, onde x é o número de Gödel da demonstração da sentença com o número de Gödel y. Assim, podemos também dizer que determinada sentença não possui uma demonstração na teoria, escrevendo $\neg\exists x Dem(x, y)$.

Assim, grosso modo, o que Gödel mostra é que é possível construir uma sentença G que diz que ela mesma não pode ser demonstrada.[10] As implicações dessa possibilidade podem ser observadas da seguinte maneira: digamos que a sentença que diz sobre si mesma não ser demonstrável dentro da teoria, possa ser denotada como $\neg A$. Se $\neg A$ for verdadeira, então $\neg A$ não pode ser demonstrada na teoria, pois se o fosse, significaria que possui uma demonstração e então teríamos uma contradição, o

[9] da Silva (2007, p. 205, n.).

[10] Gödel (1979). Para uma descrição conceitual detalhada sobre o procedimento utilizado por Gödel, recomendamos a leitura de Nagel & Newman (2007, p. 69–84).

que implicaria na inconsistência da teoria. Porém, se assumirmos que nossa teoria é consistente, $\neg A$ deve ser verdadeira e, assim sendo, estamos diante de uma sentença verdadeira que não pode ser demonstrada.

No artigo de 1969 citado anteriormente, Tarski apresenta uma formulação da problemática discutida acima, que evidencia os principais aspectos que podemos observar, a partir dos resultados de Gödel, o porquê da caracterização da noção de consequência em termos dedutivos (puramente formal) não se mostrar adequada para representar uma noção do uso comum, a qual, segundo as intuições perseguidas por Tarski, apresenta-se com um grau maior de generalidade.

De modo geral, Tarski destaca que a partir de uma teoria formal simples capaz de representar a aritmética dos números naturais, tomando-se a linguagem de tal teoria formal como uma linguagem objeto, podemos então construir em sua metalinguagem a definição de sentenças demonstráveis e sentenças verdadeiras. Agora, lembremo-nos da maneira como investigamos a noção de consequência a partir da noção de demonstração formal no Capítulo 2, e tenhamos em mente que tais conceitos coincidem. Temos, então, que podemos definir, de modo geral, a noção de demonstrabilidade em termos de relações entre sentenças e regras de inferência. Assim, destaca Tarski, podemos enumerar sucessivamente as sentenças das mais simples para as mais complexas, quais delas são demonstráveis e verdadeiras e então observarmos que o conjunto dos números das sentenças demonstráveis, a partir de determinados aspectos, não pode coincidir com o das sentenças verdadeiras. Isso ocorre, segundo o autor, pelo fato da simplicidade que está implícita na formulação do conceito de demonstrabilidade ser a mesma que permite a sua tradução na própria teoria formal, o que não ocorre em relação a definição de sentença verdadeira. O motivo, é claro, deve-se ao fato de estarmos lidando com uma linguagem-objeto capaz de expressar toda a aritmética.[11]

Em sua investigação do conceito de verdade, Tarski observa que as linguagens naturais, em parte pela sua ambiguidade, mas também pelo seu caráter semanticamente universal, isto é, uma linguagem que contém todos os termos semânticos para referir-se a si mesma, inevitavelmente nos leva à alguma antinomia da forma do Paradoxo do Mentiroso. Nota-se que, de certa forma, o método de Gödel possibilitou observar, a partir de um sistema axiomático expressivamente rico, que se pode construir algo similar à antinomia do mentiroso. Assim, no exemplo acima discutido por Tarski, quando estabelecemos uma correspondência um-a-um entre os números naturais e as sentenças verdadeiras da teoria, observamos que o número de sentenças verdadeiras pode ser in-

[11] Tarski (1969 [2007], p. 230–231): "As relações correspondentes entre números e sentenças são igualmente simples; na verdade, elas podem ser caracterizadas pelas mais elementares operações e relações aritméticas como adição, multiplicação e igualdade – portanto, em termos que ocorrem em nossa teoria aritmética. Como consequência, o conjunto dos números demonstráveis pode também ser caracterizados nesses termos. Pode-se descrever sucintamente o que foi conseguido dizendo-se que a definição de demonstrabilidade foi traduzida da metalinguagem para a linguagem-objeto."

finito assim como os números naturais. Portanto, se formos capazes de assim como no caso do conceito de demonstrabilidade, fazermos uma tradução da noção de verdade da metalinguagem para a linguagem objeto, esta última seria semanticamente universal.[12] Assim, se quisermos assumir a consistência de nossa teoria, inevitavelmente ela será incompleta. Tarski argumenta:

> Por outro lado, a discussão da noção de verdade em linguagens comuns sugere fortemente a conjectura de que, para a definição de verdade, tal tradução não pode ser obtida; caso contrário, a linguagem objeto mostrar-se-ia, num certo sentido, semanticamente universal e o reaparecimento da antinomia do mentiroso seria iminente. Contudo, confirmamos essa conjectura mostrando que se o conjunto dos números verdadeiros pudesse ser definido na linguagem da aritmética, a antinomia do mentiroso poderia ser realmente reconstruída nessa linguagem.[13]

Podemos notar que já em 1931, Tarski sugere uma alternativa frente à esta dificuldade, que consistiria em introduzir uma *ω-regra* a qual nos permitiria deduzir a sentença A, apresentada na segunda citação deste capítulo. Ou seja, nos permitiria deduzir uma sentença universal a partir de um conjunto infinito de sentenças. Porém, essa estratégia parece divergir de modo relevante de uma das intuições perseguidas pelo método dedutivo usual, que é a de requerer um procedimento finitário, isto é, onde o passo a passo de uma demonstração pode ser visualizado do começo ao fim. Ainda assim, Tarski considera a possibilidade de se modificar a *ω-regra* em vista de atender esse requisito. Seguindo a apresentação do autor, essa estratégia pode ser aplicada da seguinte forma: considera-se uma sentença B a qual afirma que determinado conjunto infinito de sentenças (A_1,..., A_n) pode ser provado a partir do conjunto usual de regras de inferência da teoria. Então, determinamos uma regra a qual garante que se B for provada, então podemos provar uma sentença universal como A.

Contudo, ainda nos deparamos com a dificuldade de se limitar este procedimento, agora em relação à metateoria na qual tal estratégia está assentada. Para superar isso, Tarski diz que poderíamos nos limitar a construir esse procedimento apenas para teorias dedutivas a partir das quais se pode trabalhar a aritmética dos números naturais. Deste modo, para todas as sentenças dessas teorias e suas metateorias, seria possível estabelecer uma correspondência um a um, por exemplo, substituindo a sentença B pela sua interpretação aritmética B' e então, segundo Tarski, obtemos uma regra que não difere essencialmente das usuais, tanto em sua aplicabilidade, quanto em sua natureza finitária.[14]

[12]Para uma discussão mais detalhada sobre o Paradoxo do Mentiroso nas linguagens naturais, cf. TARSKI (1933 [2007], p. 31), TARSKI (1944 [2007], p. 167).

[13]TARSKI (1969 [2007], p. 230).

[14]TARSKI (1936 [2007] p. 237–238).

Porém, como aponta Tarski, a partir dos resultados obtidos por Gödel em seus teoremas da incompletude, as disciplinas as quais se valerem dessa estratégia, estarão fadadas em permanecer incompletas.[15] O trabalho de Gödel expôs uma limitação intrínseca dos sistemas axiomático-formais capazes o suficiente em representar uma parte expressiva da aritmética. Isso significa, entre outras coisas, que quando estamos trabalhando com uma linguagem com grande expressividade, a partir da suposição de que a teoria em questão seja consistente, sempre haverá sentenças consideradas verdadeiras dessa linguagem, as quais não se pode provar com base na teoria a qual a linguagem representa.

> Em toda teoria dedutiva (com exceção de certas teorias de natureza particularmente elementar), por mais que se suplementem as regras de inferência ordinárias com novas regras puramente estruturais, é possível construir sentenças que se seguem, no sentido usual, dos teoremas dessa teoria, mas que, apesar disso, não podem ser provadas nessa teoria com base nas regras de inferência aceitas.[16]

É interessante observar o ponto onde tais resultados colocam em cheque o método dedutivo como capaz de representar a noção de consequência. Isso acontece especialmente por conta das características intuitivas as quais Tarski almeja que sua teoria expresse adequadamente. Como veremos mais adiante, uma dessas características é a ideia de que a partir de um conjunto de sentenças verdadeiras apenas seja possível extrair consequências verdadeiras. Assim, um dos pontos mais caros à teoria de Tarski é como tornar possível falar de sentenças verdadeiras, sem incorrer na inconsistência da teoria, pressupondo o caráter de necessidade que o esquema deve apresentar, de modo que possa servir como método de exame de consequências.

Como vimos, as linguagens semanticamente universais usualmente apresentam um ambiente fértil para antinomias auto-referenciais, de modo que, fica evidenciado as implicações quando tentamos investigar uma determinada linguagem através dela mesma. A questão gira em torno do fato de que, se quisermos lidar com uma linguagem universal e lhe garantir a consistência, então tal teoria deverá ser sempre incompleta.

---

[15] Tarski (1969 [2007] p. 231): "Poder-se-ia pensar que a conclusão depende essencialmente dos axiomas e das regras de inferência específicos escolhidos para nossa teoria aritmética e que o resultado final da discussão poderia ser diferente se enriquecêssemos apropriadamente a teoria, [. . .] supondo que uma teoria inclua como parte a aritmética dos números naturais [. . .] podemos repetir porção essencial do argumento de forma praticamente inalterada e concluímos, novamente, que o conjunto das sentenças demonstráveis é diferente do conjunto das sentenças verdadeiras da teoria [. . .] concluiremos também que existem na teoria sentenças verdadeiras que não são demonstráveis."

[16] Tarski (1936 [2007] p. 238–239).

3.1.1 Indefinibilidade da verdade

Observando a distinção iminente entre sentenças demonstráveis e sentenças verdadeiras é que Tarski em 1933, no artigo sobre a noção de verdade, chega ao seu teorema da indefinibilidade da verdade.[17] De maneira geral, tal teorema diz que é impossível definir a noção de verdade para qualquer linguagem aritmetizável a partir dela mesma.

> **Teorema I**.
>
> Supondo que a classe de todas as sentenças demonstráveis da metateoria seja consistente, é impossível construir uma definição adequada de verdade no sentido da Convenção T com base na metateoria.[18]
>
> O resultado obtido no Teorema I talvez pareça, à primeira vista, incomumente paradoxal. Tal impressão será sem dúvida enfraquecida tão logo recordemos a distinção fundamental entre o conteúdo de um conceito a ser definido e a natureza daqueles conceitos que estão à nossa disposição para a construção da definição.[19]

As implicações dos teoremas de Gödel expõem um flanco dos sistemas axiomáticos dedutivos, pois, por mais que se suplemente o sistema antigo de regras, com novas regras, ainda assim existirão sentenças as quais não poderão ser provadas dentro da própria teoria.[20] Sobre as implicações dos teoremas da incompletude, Tarski afirma:

> A importância desse resultado não fica em nada diminuída pelo fato de suas implicações filosóficas terem um caráter essencialmente negativo. O resultado mostra que, na verdade, em nenhum domínio da matemática a noção de demonstrabilidade é um substituto perfeito para a noção de

[17]Há indícios em cartas que mostram que Gödel já sabia da indefinibilidade formal da noção de verdade, porém nunca publicou sobre. Para maiores detalhes sobre o resultado em questão, vide MURAWSKI (1997).

[18]TARSKI (1956 [2007], p. 117).

[19]TARSKI (1956 [2007], p. 121). TARSKI (1956 [2007] p. 124): "Os métodos anteriormente usados demonstraram-se inaplicáveis; todos os conceitos e formas gramaticais da metalinguagem encontraram uma interpretação na linguagem e, assim, pudemos mostrar conclusivamente que a semântica da linguagem não podia ser estabelecida como parte de sua morfologia. A importância dos resultados alcançados reduz-se exatamente a isso."

[20]TARSKI (1956 [2007] p. 121): "O fato de a linguagem estudada e a ciência dedutiva realizada nessa linguagem serem formalizadas ocasionou um interessante fenômeno: foi possível reduzir a conceitos estruturais-descritivos certas outras noções de caráter totalmente diferente, que são distintas da anterior tanto em sua origem quanto em seu significado usual – a saber, o conceito de consequência junto com uma série de noções relacionadas. (Vide nota 97): A redução do conceito de consequência a conceitos pertencentes à morfologia da linguagem é um resultado do método dedutivo em seus mais recentes estágios de desenvolvimento. Quando, na vida cotidiana, dizemos que uma sentença decorre de outras sentenças, sem dúvida queremos dizer algo bem diferente da existência de certas relações estruturais entre sentenças. Em vista dos mais recentes resultados de Gödel, parece duvidoso se essa redução foi efetuada sem deixar um resto."

> verdade. A crença em que uma demonstração formal pode servir como instrumento adequado para estabelecer a verdade de todos os enunciados matemáticos mostrou-se desprovida de fundamento. O triunfo original dos métodos formais foi seguido de um sério recuo.[21]

Assim, a questão se coloca em relação à capacidade de um sistema dedutivo-formal em representar todas as verdades da teoria, na medida em que o objetivo de Tarski é construir uma definição de âmbito geral do conceito de consequência lógica, orientada por uma pressuposição já defendida na história da lógica, a preservação da verdade. Como foi exposto anteriormente, o conjunto de sentenças demonstráveis não coincide com o conjunto de sentenças verdadeiras, portanto, o método axiomático puramente formal por mais que seja consistente, não é capaz de abarcar a totalidade de sentenças verdadeiras, no sentido de fornecer à cada uma delas uma demonstração. Isso implica que, uma vez que se almeje uma teoria para representar uma noção geral de consequência, onde se busca essencialmente a preservação da verdade, isto é, onde seja possível trabalhar com a noção de verdade sem incorrer em inconsistência, o método dedutivo-formal apresenta-se como inadequado.[22]

Este fato, segundo Tarski, demonstra que uma caracterização puramente sintática de consequência não é suficientemente capaz de encerrar a noção de consequência lógica numa formalização, a qual seja coextensiva em relação à nossa intuição comum de tal conceito.[23] Assim, em relação à este aspecto, Tarski conclui sua reflexão já no artigo de 1931:

> O conceito formalizado de consequência, por extensão, nunca coincidirá com o comum, a consistência do sistema não impedirá a possibilidade de 'falsidade estrutural'. Por mais que interpretemos liberalmente o conceito de método dedutivo, sua característica essencial sempre foi (pelo menos até agora) que na construção do sistema e, em particular, na formulação de suas regras de inferência, é feito o uso exclusivamente de lógica geral e conceitos

[21] Tarski (1969 [2007], p. 232–233).

[22] Murawski (2020, p. 14): "Note that "mathematical truth" should be understood here in an intuitive way. Moreover, the informal concept of truth was not commonly accepted as a definite mathematical notion in Hilbert's and Gödel's time. There was also no definite distinction between syntax and semantics. This explains also, in some sense, why Hilbert preferred to deal in his metamathematics solely with forms of formulas, using only finitary reasonings which were considered to be secure – contrary to semantical reasonings which were nonfinitary (sometimes called: infinitary) and consequently not secure."

[23] Murawski (2011, p. 107): "Gödel's theorem on the completeness of first-order logic and his discovery of the incompleteness phenomenon together with the undefinability of truth vs. definability of formal demonstrability showed that formal provability cannot be treated as an analysis of truth, that the former is in fact weaker than the latter. It was also shown in this way that Hilbert's dreams to justify classical mathematics by means of finitistic methods cannot be fully realized. Those results together with Tarski's definition of truth (in the structure) and Carnap's work on the syntax of language led also to the establishing of syntax and semantics in the 1930s."

> estruturalmente descritivos. Se agora desejamos considerar como o ideal da ciência dedutiva a construção de um sistema no qual todas as afirmações verdadeiras (da linguagem dada) e apenas essas estão contidas, então este ideal infelizmente não pode ser combinado com a visão acima do método dedutivo.[24]

Lembrando aqui o que foi dito em relação ao método dedutivo, o qual tem como objetivo oferecer um procedimento que permita extrair apenas sentenças verdadeiras e que, até certo tempo, a noção de verdade matemática coincidia-se com a de demonstrabilidade, tem-se que, as limitações do método dedutivo acabaram por apontar uma distinção entre tais conceitos, o que proporcionou, de certa maneira, o surgimento de uma abordagem semântica dos sistemas formais.[25]

Na intenção de resumirmos os pontos gerais mais importantes em relação aos resultados de Gödel e às investigações de Tarski, destacamos os apontamentos de Murawski que põem em foco, entre outros aspectos, a natureza intrínseca de duas abordagens as quais até então achavam-se entrelaçadas, quando diz:

> Uma das consequências do teorema de Tarski é o fato de que, para construir a teoria da verdade, por exemplo, para a linguagem da aritmética dos números naturais (portanto, uma teoria das entidades finitas), deve-se aplicar meios mais poderosos, de fato, o infinito. Em outras palavras: o conceito de uma verdade aritmética não é aritmeticamente definível. Geralmente: a semântica precisa do infinito! Ele indica também a lacuna entre o conceito sintático de uma prova (formal) e provabilidade (formal) de um lado e o conceito de verdade.[26]

[24]TARSKI (1931, p. 295). Nossa tradução. Lê-se no original: "the formalized concept of consequence will, in extension, never coincide with the ordinary one, the consistency of the system will not prevent the possibility of 'structural falsehood.' However liberally we interpret the concept of the deductive method, its essential feature has always been (at least hitherto) that in the construction of the system and in particular in the formulation of its rules of inference, use is made exclusively of general logical and structurally descriptive concepts. If now we wish to regard as the ideal of deductive science the construction of a system in which all the true statements (of the given language) and only such are contained, then this ideal unfortunately cannot be combined with the above view of the deductive method."

[25]TARSKI (1956 [2007] p. 124): "Mas, além disso, o Teorema I acarreta importantes consequências de natureza metodológica. Ele mostra que é impossível definir na metateoria uma classe de sentenças da linguagem estudada que consista exclusivamente em sentenças materialmente verdadeiras e seja ao mesmo tempo completo (no sentido da Definição 20 do §2). Em particular, se aumentarmos de qualquer maneira a classe de sentenças demonstráveis da ciência investigada - seja fazendo acréscimos à lista de axiomas ou liberalizando as regras de inferência - então ou adicionamos sentenças falsas a essa classe ou obtemos um sistema incompleto."

[26]MURAWSKI (2020, p. 14). Nossa tradução: "One of the consequences of Tarski's theorem is the fact that in order to construct truth theory, for example, for the language of the arithmetic of natural numbers (hence a theory of finite entities) one should apply more powerful means, in fact the infinity. In other words: the concept of an arithmetical truth is not arithmetically definable. Generally: semantics needs the infinity! It indicates also the gap between the syntactical concept of a (formal) proof and (formal) provability on the one side and the concept of truth."

Como vimos, os resultados de Gödel desferem um duro golpe que apesar de não ser fatal, enfraqueceu as pretensões hilbertianas e também as logicistas. Apesar de tais implicações serem contundentes e impactarem os estudos sobre fundamentos da matemática, a necessidade de novas investigações proporcionou o surgimento de novas abordagens. Entre os poucos que puderam contemplar, de fato, os resultados dos teoremas da incompletude, Tarski foi um dos autores mais profícuos e diante deles (fazendo questão em algumas ocasiões de tornar público a proximidade em que esteve de alcançar os mesmos resultados), fornecendo uma teoria capaz de lidar com o conceito de verdade de maneira precisa evitando que a teoria produza paradoxos como os anteriores.[27]

Diante disso, como Tarski observa no artigo de 1936, que a situação demanda outras estratégias, dessa vez de natureza diferente das anteriores, e que foram recentemente desenvolvidas, em parte, graças às investigações do próprio autor em relação ao conceito de verdade, em especial no que diz respeito às linguagens formalizadas. Em seu célebre artigo de 1933, Tarski explora noções semânticas dentro de um contexto formal que lhe permite falar de sentenças verdadeiras sem incorrer em paradoxos e de maneira materialmente adequada e formalmente correta. Entre os resultados alcançados por essa teoria está a possibilidade de se definir precisamente o que significa a expressão "sentença verdadeira" dentro de uma determinada teoria formalizada.

3.2 Semântica formal

Os estudos semânticos dizem respeito às relações entre uma linguagem e os objetos os quais ela designa ou as maneiras adequadas de interpretar determinada linguagem. Se tratando de uma semântica formal, as investigações são voltadas para as linguagens formais. Nesse sentido, tal abordagem estuda os aspectos interpretativos relativos a linguagens formais, ou seja, noções semânticas aplicadas a esse tipo de linguagem de maneira que seja possível provê-la de conceitos interpretativos em relação ao seu aspecto formal por ele mesmo. Como vimos, as distinções atuais entre sintática e semântica presentes em estudos de lógica e matemática foram aos poucos sendo introduzidas a partir de novos resultados sobre sistemas formais. Assim, aos poucos a abordagem semântica foi consolidando-se e de certa maneira, apresentou-se como uma disciplina capaz de reabilitar determinados conceitos os quais, pelos aspectos discutidos na sessão anterior, foram colocados sob suspeita. Porém, como o próprio Tarski destaca, os estudos semânticos foram de certa forma negligenciados. A ocorrência de estudos deste tipo, começam a aparecer aos poucos, sendo inclusive,

[27]Para mais informações sobre a relação de Tarski e Gödel, vide: Feferman & Feferman (2008); Murawski 1996, 2002, e 2020.

como aponta Woleński, apresentados sob outras denominações.[28] Sobre a introdução de conceitos semânticos nos estudos formais, aponta Tarski:

> Encorajados por esse sucesso, tentamos ir além e construir na metalinguagem definições de certos conceitos pertencentes a um outro domínio: aquele chamado a *semântica da linguagem* – isto é, conceitos tais como satisfação, denotação, verdade, definibilidade, e assim por diante. Um aspecto característico dos conceitos semânticos é que eles dão expressão a certas relações entre as expressões da linguagem e os objetos a respeito dos quais essas expressões falam, ou que, por meio de tais relações, eles caracterizam certas classes de expressões ou outros objetos. Podíamos também dizer (fazendo uso da *suppositio materialis*) que esses conceitos servem para estabelecer a correlação entre os nomes de expressões e as próprias expressões.[29]

A análise da noção de verdade empreendida por Tarski é bastante extensa, começando por problematizar tal noção e o modo como se utiliza tal conceito no contexto das linguagens naturais. Para os nossos propósitos, nesta seção, é interessante resgatarmos ao menos algumas estratégias e técnicas utilizadas por Tarski nesse expediente.

Algumas das estratégias utilizadas para definir a noção de verdade serão essenciais na definição de consequência lógica como *função sentencial* e *satisfação*. Tais noções são, a grosso modo, conceitos a partir dos quais se pode formular outros conceitos, como, por exemplo, a noção de verdade. Além disso, tendo em mente as discussões apresentadas na seção anterior, mostrou-se a necessidade de se utilizar ferramentas mais poderosas, como bem destacou Murawski e é por isso, entre outras coisas, que assim como em relação ao conceito de verdade, Tarski persegue pelos caminhos da semântica (formal), maneiras para fornecer uma caracterização adequada de consequência lógica.

Pode-se dizer, que a noção semântica de 'verdadeiro' é fornecida a partir de dois principais artifícios teóricos. Primeiro, faz-se a distinção entre linguagem objeto e metalinguagem. A linguagem objeto é a qual receberá a definição de verdade que, por sua vez, será formulada na metalinguagem. Essa estratégia, entre outras coisas, permite

[28] Woleński (1999, p. 2–3): "In the twenties, Polish philosophers began to use the word 'semantyka' (the Polish counterpart of 'semantics') for considerations on the meaning-aspect of language. In particular, a very influential book by Tadeusz Kotarbinski, *Elements of Theory of Knowledge, Logic and Methodology of Sciences* (1929) spoke about semantics understood in this way.5 At the same time, Stanislaw Leśniewski introduced the term 'semantic categories' for what Edmund Husserl understood by *Bedeutungkategorien*. Kazimierz Ajdukiewicz employed the term 'semantics' in his review of the above mentioned book by Kotarbinski. The content of the relevant section shows that Ajdukiewicz considered semantics to be occupied with various functions of language (meaning, denotation, etc.). [. . .] However, I did not find in Polish writings before Tarski any explicit statement that the concept of truth belongs to semantics. On the other hand, almost everybody in Polish philosophy accepted the classical (Aristotelian) truth-definition."

[29] Tarski (1933 [2007], p. 122).

evitar paradoxos autorreferenciais, e pode ser considerada como uma das importantes contribuições de Tarski ao aplicar tal distinção nas investigações semânticas.[30]

> As pessoas não se deram conta de que a linguagem *da qual* falamos não precisa coincidir, de forma alguma, com a linguagem *na qual* falamos. A análise das antinomias mencionadas mostra, ao contrário, que os conceitos semânticos simplesmente não tem lugar na linguagem à qual eles se relacionam, que a linguagem que contém a sua própria semântica, e na qual valem as leis usuais da lógica, inevitavelmente deve ser inconsistente. Apenas nos últimos anos se prestou atenção a esses fatos (pelo que sei, Leśniewski foi o primeiro a se dar conta deles por inteiro).[31]

Após tal distinção, Tarski fornece uma definição do que significa a expressão "sentença verdadeira", seguindo a intuição advinda da concepção clássica da verdade (aristotélica), de modo a considerá-la como materialmente correta, e denomina-a "Convenção T": *'p' é verdadeiro se, e somente se, p*, definição a qual ele considera parcial. A partir disso, Tarski de maneira *recursiva*, define a noção de *satisfação* para todos os casos em que a Convenção T pode ser instanciada. Esse procedimento é feito tomando a convenção T como esquema de uma *função sentencial*. Assim, Tarski indica de que maneira tais sentenças podem ser satisfeitas, definindo primeiro as sentenças mais simples, onde a substituição das variáveis pode ser feita de maneira óbvia. A partir disso, mais uma vez define-se de maneira recursiva as sentenças mais complexas por meio das mais simples. Desta forma, pode-se obter uma noção geral de satisfação e então, definir a noção de *verdade* em termos de satisfação. Deste modo, uma sentença é verdadeira se é satisfeita por toda a sequência de objetos.[32]

Os ganhos da teoria proposta por Tarski podem ser avaliados como a reabilitação do conceito de verdade, mediante um procedimento formalmente adequado, no sentido de tornar possível tratar de tal conceito a partir das técnicas da semântica formal, sem incorrer nas dificuldades discutidas até aqui. Para arrematar a análise da problemática que gostaríamos de pôr em foco nesta seção, vale a pena citar uma passagem onde Tarski resume com bastante clareza a relação entre o método dedutivo e sua abordagem semântica para seguirmos em nossa análise:

> A definição de verdade possui ainda uma outra consequência que está igualmente ligada às investigações de Gödel. Como se sabe bem, Gödel desenvolveu um método que torna possível, em toda teoria que inclua a aritmética dos números naturais como uma parte sua, construir sentenças

[30] Vide Capítulo 1 onde é delineado o contexto da formação intelectual de Tarski e da comunidade acadêmica de que fez parte, e o que diz respeito às investigações lógicas e semânticas.

[31] Tarski (1969, [2007], p. 150).

[32] Tarski (1933 [2007], p.174–175).

> que não são nem demonstráveis nem refutáveis nessa teoria. [. . .] A demonstração de que as sentenças realmente envolvidas desse modo tornam-se decidíveis também repousa na definição de verdade. De forma similar, – como mostrei por meio dos métodos empregados no desenvolvimento da semântica –, para qualquer teoria dedutiva dada, é possível indicar conceitos que não podem ser definidos nessa teoria – embora, por seu conteúdo, eles pertençam a essa teoria e que se tornam definíveis nela se a teoria for enriquecida com a introdução de tipos superiores. Em suma, podemos dizer que o estabelecimento da semântica científica e, em particular, a definição de verdade, permitem contrabalançar os resultados negativos no campo da metamatemática com resultados positivos correspondentes, e de forma que preencham em certa medida as falhas que se revelaram no método dedutivo e na própria estrutura da ciência dedutiva.[33]

3.3 Condição (F) e a noção de modelo

Assim como no percurso em que define-se o conceito de verdade em linguagens formalizadas, buscando dentro dessa definição apreender uma noção intuitiva e de uso comum deste termo, formalizando-o, Tarski segue na mesma direção quando aponta o começo de sua investigação de caráter semântico em seu artigo 1936, buscando seguir duas noções intuitivas as quais, segundo ele, parecem compor o sentido usual da noção de consequência lógica e que ele ilustra no seguinte exemplo:

> Considere qualquer classe K de sentenças e uma sentença X que se siga das sentenças dessa classe. Do ponto de vista intuitivo, não pode jamais acontecer que a classe K consista somente de sentenças verdadeiras e que a sentença X seja falsa. Mais ainda, desde que nos concerne aqui o conceito lógico de consequência, isto é, formal e, portanto, uma relação que deve ser determinada unicamente pela forma das sentenças entre as quais ela se dá, essa relação não pode ser influenciada de modo algum pelo conhecimento empírico dos objetos aos quais a sentença X ou as sentenças da classe K se referem. A relação de consequência lógica não pode ser afetada pela substituição de designações dos objetos referidos nessas sentenças por designações de quaisquer outros objetos.[34]

Essas intuições compõem o que Tarski chama de condição (F), que se configura como uma condição necessária para a noção de consequência lógica. A condição (F)

[33]Tarski (1969 [2007], p. 256).

[34]Tarski (1936 [2007], p. 241). Simmons (2009, p. 561). Simmons resume: "(i) It can never happen that every member of K is true and X is false. (ii) The subject matter of K and X (the objects to which reference is made) have no effect on the consequence relation – only the form of the sentences matters."

então expressa o fato de que se considerarmos cada membro de K como verdadeiro, não deve ser o caso que o conjunto X de sentenças obtidas a partir de K seja falso. A definição também deve respeitar um caráter formal, que no caso apresenta-se na acepção esquemática do termo. Desta forma, os objetos designados pelas constantes individuais de K e X não devem interferir na relação entre as premissas e a conclusão quando uma relação de consequência lógica é por elas mantida. Assim, Tarski então define a condição (F):

> (F) Se nas sentenças da classe K e na sentença X, as constantes – com exceção de constantes puramente lógicas – são substituídas por quaisquer outras constantes (como sinais substituídos em todas as ocorrências por mais sinais iguais), e se nós denotamos a classe de sentenças assim obtidas de K por K′, e a sentença obtida de X por X′, então, a sentença X´ tem que ser verdadeira sob a condição apenas de que todas as sentenças da classe K′ sejam verdadeiras.[35]

Porém, Tarski nota que apesar de tal definição apresentar um caráter de necessidade, ela ainda não é uma condição suficiente. Pois, mesmo substituindo as constantes não lógicas, respeitando as formas das sentenças de modo que uma vez as premissas sendo verdadeiras a conclusão necessariamente seja verdadeira, podemos ter sucesso nesse procedimento, simplesmente devido ao estoque de termos disponíveis da linguagem a qual estamos tratando, ocasionando a preservação das condições estipuladas inicialmente. Outro aspecto, é o fato de que é possível interpretar as constantes não-lógicas de forma que as premissas sejam verdadeiras e, no entanto, a conclusão seja falsa. Sendo assim, a condição (F) apresenta aspectos que devem ser considerados como necessários para uma instância de consequência lógica, mas não são suficientes na medida em que permitem configurações que se distanciam das intuições perseguidas na formulação da noção de consequência.[36]

Tarski então introduz outras noções, dessa vez, noções semânticas que poderão suplementar a condição (F) e que foram desenvolvidas e aplicadas de maneira essencial na definição semântica de verdade como *satisfação* e *função sentencial*.[37] Levando em

[35]Tarski (1936 [2007], p. 241).

[36]Gomez-Torrent (2019, n. p.): "To give an example, suppose that the language we are considering is LAr+. Since both the relation of being less than and the relation of being the immediate predecessor of are irreflexive over the domain of the natural numbers, the sentence "$\forall x$ ($Nx \rightarrow \neg(Mxx)$" would be a logical consequence of every set of premises on criterion (F): no replacement of the non-logical constants "N" and "M" by other non-logical constants of LAr+ turns that sentence into a falsehood. But clearly "$\forall x$ ($Nx \rightarrow \neg(Mxx)$" is not a logical consequence of, say, "$N0$". This can be justified, e.g., keeping fixed the usual interpretation of "0" and "N" but observing that "M" can be interpreted by means of the reflexive relation of being less than or equal to; under this interpretation, "$\forall x$ ($Nx \rightarrow \neg(Mxx)$" is false, although "$N0$" is true. (Tarski's remark that the supposition that all objects have names in the language can never be realized can be justified, for example, by observing that there are non-denumerably many sets of natural numbers, but in the languages he considers there are only denumerably many constants.)"

[37]Tarski (1936 [2007], p. 242).

consideração o significado desses conceitos, vejamos como Tarski aplica as ferramentas semânticas para tornar a condição (F) também suficiente.

Um dos aspectos apontados pelo autor é que a condição (F) pode ser satisfeita pela simplicidade da linguagem e, como o objetivo é chegar a uma definição de âmbito mais geral, isto é, que não dependa da riqueza da linguagem em questão. Assim, como não se pretende que a definição seja aplicável apenas à linguagens onde é possível listar designações para todos os termos extra-lógicos, a noção de satisfação de uma função sentencial poderá prover de maneira adequada uma definição abrangente como se deseja. Desta forma, considera-se uma determinada linguagem, cujas sentenças são transformadas em funções sentenciais da seguinte maneira: substitui-se todas as constantes extra-lógicas das sentenças (da linguagem sob consideração) por variáveis, de maneira que as mesmas variáveis substituam ocorrências iguais de constantes. A partir disso podemos obter uma classe de sentenças L′ cujas sentenças são funções sentenciais da linguagem inicialmente investigada. Lembrando aqui a maneira como tais noções foram usados para definir o conceito de verdade, Tarski aplica de modo similar quando diz:

> Uma sequência da classe L′ será chamada um *modelo* ou *realização da classe L de sentenças* (e apenas nesse sentido se fala usualmente de modelos de um sistema axiomático de uma teoria dedutiva). Se, em particular, a classe L consiste em uma única sentença X, deveremos também nos referir a um modelo da classe L como um modelo da sentença X.

Com tais noções, a condição (F) passa a ser entendida no sentido onde X deve ser uma consequência lógica de K se não for possível reinterpretar as constantes não lógicas de forma que uma vez as premissas sendo verdadeiras a conclusão seja falsa. A estratégia da definição consiste em substituir as constantes não-lógicas por funções sentencias que devem ser satisfeitas por determinados objetos. E assim, temos a clássica definição de consequência lógica em termos de modelo:

> A sentença X segue-se logicamente das sentenças da classe K se, e somente se, todo modelo da classe K é também um modelo da sentença X.

Diante dessa formulação, podemos também observar características que são consideradas essenciais para a noção de consequência lógica ainda hoje. Por exemplo, quando Tarski diz "Considere qualquer classe K de sentenças e uma sentença X que se siga das sentenças dessa classe. Do ponto de vista intuitivo, não pode jamais acontecer que a classe K consista somente de sentenças verdadeiras e que a sentença X seja falsa", pode ser entendido como um critério de *necessidade* para uma relação de consequência lógica, isto é, a verdade da conclusão deve ser um resultado o qual a verdade das premissas implica de modo necessário. Já quando o autor afirma: "[...] desde que nos concerne aqui o conceito lógico de consequência, isto é, formal e, portanto uma relação que deve ser determinada unicamente pela forma das sentenças entre as quais se dá", podemos ver claramente o requisito da condição de *formalidade*, isto é, a relação de consequência deve ser analisada simplesmente em virtude da relação formal entre suas partes (premissas e conclusão). A partir disso, por conseguinte, somos levados à característica *a priori*, que Tarski alude na passagem "[...] essa relação não pode ser influenciada de modo algum pelo conhecimento empírico dos objetos aos quais a sentença X ou as sentenças da classe K se referem."

Em relação às abordagens estritamente sintáticas e à abordagem semântica, poderíamos nos perguntar se a teoria de Tarski proposta em 1936 de alguma forma é a tentativa de suplementar ou até mesmo atualizar a teoria sobre o operador de consequência. Tarski não faz nenhuma conexão direta nesse sentido, porém podemos responder essa questão a partir de outro trabalho do autor. Em 1969, Tarski é claro quanto a relação da implicação dos resultados mais recentes, para os quais contribui em boa medida. Assim, em relação a sua teoria da verdade na qual desenvolve as técnicas semânticas utilizadas em 1936 e a noção de demonstração, Tarski afirma:

> A noção de verdade para teorias formalizadas pode agora ser introduzida por intermédio de uma definição precisa e adequada, podendo, portanto, ser usada sem restrições e reservas nas discussões metalógicas. Ela se tornou, de fato, uma noção metalógica básica envolvida em problemas e resultados importantes. Por outro lado, a noção de demonstração também não perdeu seu significado. Demonstrações são ainda o único método para garantir a verdade de sentenças dentro de qualquer teoria matemática específica. Entretanto, estamos cientes agora do fato de existirem sentenças formuladas na linguagem da teoria que são verdadeiras mas não demonstráveis, e não podemos deixar de considerar a possibilidade de algumas dessas sentenças figurarem entre aquelas que nos interessam e que estamos empenhados em demonstrar. [...] A noção de sentença verdadeira atua, assim, como um limite ideal que nunca pode ser atingido, mas do qual tentamos nos aproximar através da ampliação gradual do conjunto de sentenças demonstráveis. [...] Não existe conflito entre as noções de verdade e de demonstração no desenvolvimento da matemática; as duas não estão em guerra e, sim, coexistem pacificamente.[38]

Além disso, a formulação tarskiana de consequência, influencia decisivamente nossa concepção *esquemática* de lógica, quando a variação dos objetos em detrimento

[38] Tarski (1969 [2007], p. 233).

da forma é um dos requisitos defendidos por Tarski: "A relação de consequência lógica não pode ser afetada pela substituição de designações dos objetos referidos nessas sentenças por designações de quaisquer outros objetos". Como veremos mais adiante, Tarski não é o primeiro a explorar o elemento variacional para definir consequência lógica. Apesar disso, o destaque de sua teoria está relacionado ao uso de noções como satisfação empregada em sua concepção *esquemática* do conceito de consequência.

Em relação à pressuposição teórica subjacente da teoria de Tarski, diferentemente do operador de consequência em que há o uso de uma abordagem por transferência de verdade (validade), garantida pelo aparato lógico dedutivo, a teoria proposta em 1936, parece estar muito mais relacionada à abordagem por propriedades, na medida em que o elemento que relaciona a conclusão às premissas, é a propriedade de preservarem a verdade em relação ao mesmo modelo.

Capítulo 4

Contrapontos históricos: antes e depois de 1936

Como viemos delineando nos capítulos anteriores, os trabalhos de Tarski sobre consequência podem ser considerados como pertencentes à duas abordagens tecnicamente distintas, uma baseada em métodos dedutivos e puramente sintáticos, e outra baseada em elementos semânticos. A maneira como apresentamos atualmente uma relação de consequência lógica é considerada de certa forma como um eco do trabalho de Tarski em 1936. Em estudos que buscam resgatar influências diretas ou indiretas de trabalhos teóricos não é difícil encontrar apontamentos que chamam a atenção para pontos em comum com teorias propostas no passado, e não é diferente em relação a teoria sobre consequência lógica de Tarski, que tem sido comparada com a teoria da derivabilidade de Bolzano.

Do mesmo modo, pode-se investigar certas atribuições históricas, por exemplo, se determinada teoria pode ser de fato considerada como "descendente" ou pertencente à alguma abordagem teórica anterior. Uma dos objetivos desta dissertação, de maneira geral, é a de situar os trabalhos tarskianos nos contextos onde os principais pontos debatidos podem ser observados de maneira mais geral. Nesse sentido, o objetivo desse capítulo é trazer elementos históricos e teóricos que nos permitam identificar o "antes" da teoria de Tarski com respeito a sua ideia e estratégia de caracterização de consequência lógica, e o depois, que aqui por motivos de tempo e espaço, nos limitaremos a discutir, de certa maneira, se de fato pode-se traçar um paralelo entre a teoria tarskiana de consequência e a atual teoria de modelos, ou seja, em que medida a teoria de modelos atual deve sua paternidade à Tarski.

4.1 Bolzano e a derivabilidade

Logo após Tarski publicar seu artigo sobre consequência lógica em 1936, foi apontado, pela primeira vez por Heinrich Scholz (1884–1956) em um artigo intitulado *Wissenschaftslehre Bolzanos, Eine Jahrhundert-Betrachtung* em 1937, certas similaridades com o que foi proposto quase cem anos antes pelo filósofo tcheco Bernard Bolzano (1781–1848). Ao que tudo indica, Tarski não estava ciente da teoria bolzaniana da dedutibilidade.[1] Porém, alguns autores como Simons chamam a atenção para uma provável genealogia intelectual que é possível traçar de Bolzano até Tarski por intermédio, sobretudo, de Twardowski, que a partir de sua proximidade direta com Brentano (que foi aluno de Bolzano) e Zimmermman (seu orientador de doutorado que foi discípulo de Bolzano), levou adiante em Lvóv a postura intelectual de seu mestre, particularmente em relação aos estudos em lógica.[2] Como abordamos brevemente no Capítulo 1, Twardowski foi professor de Łukasiewicz, Leśniewski e Kotarbiński, os quais foram professores de Tarski em Varsóvia.[3]

A relevância de Bolzano para a lógica que será desenvolvida no século XX, pode ser encontrada em Coffa, onde o autor coloca a proposta bolzoniana de derivabilidade como um marco no início das abordagens semânticas posteriores.[4]

Uma das comparações que pode ser feita entre Bolzano e Tarski é levantada por Dutihl-Novaes, que aponta para o uso esquemático que ambos os autores fazem em suas teorias e que influencia a maneira como atualmente tomamos o termo "formal", isto é, numa acepção em que requisita variabilidade e indiferença aos particulares.[5] A estudiosa explica:

> Por séculos, essa foi a visão predominante do que significa ser formal, até que, em seu artigo de 1936/2002, Tarski delineou as limitações de permitir que a variação opere apenas em termos. Ele estava preocupado, em particular, com a possibilidade de a linguagem não ter termos para todos os objetos; por isso, ele propôs uma reformulação da noção do formal como variabilidade, ou seja, que a variação deveria ser um procedimento a respeito de objetos (objetos no mundo ou construções matemáticas), e não

[1] DUTILH–NOVAES (2011, p. 303): "Bolzano represents a particularly important stage in the development of the schematic notion of the formal in that he may be the (indirect) source for Tarski's use of schematic formality in his analysis of the concept of logical consequence. It has often been pointed out that there are striking similarities between Bolzano's account of derivability and Tarski's notion of logical consequence, and even if Tarski himself did not have direct knowledge of Bolzano's analysis, he was certainly indirectly exposed to it via his teachers (who were students of a student of Brentano's, who in turn heavily relied on Bolzano's work)."

[2] SIMONS (1992).

[3] Vide no Capítulo 1 alguns aspectos da formação do contexto intelectual de Tarski.

[4] COFFA (1991).

[5] DUTIHL-NOVAES (2011).

termos. Isso, por sua vez, consolidou a noção do formal como indiferença aos indivíduos.[6]

A teoria de Bolzano sobre derivabilidade é desenvolvida dentro do sistema lógico do autor, onde os principais aspectos da teoria estão reunidos em sua grande obra, intitulada *Wissenschaftslehre* [Teoria da Ciência]. Tal obra é bastante extensa para ser detalhada aqui, então vamos nos restringir a apresentar, de maneira geral, os principais conceitos presentes em sua teoria da derivabilidade.

A noção de proposição exerce um papel elementar em sua teoria, assim como a noção de *ideia em si mesma*. Como aponta Berg, Bolzano considera proposições como estruturas compostas de ideias nelas mesmas (Vorstellung an sich). Uma ideia nela mesma, segundo o interprete, poderia ser entendida pela lógica dos dias de hoje como pertencente à extensão de um conceito.[7]

As ideias podem apresentar-se de maneira simples e complexa, de modo que tais diferenças se tornam relevantes para a relação de derivação. Além disso, o autor elabora uma teoria minuciosa sobre a variação de ideias, que permite analisar as diversas formulações que uma proposição pode apresentar a partir das categorias de ideias consideradas, onde o elemento variável, assim como em Tarski (sentenças), são os componentes não-lógicos da estrutura da proposição, e que Bolzano apresenta como *representações*. Como nos trechos a seguir:

> Frequentemente consideramos que certas representações em uma dada proposição são variáveis e, sem estarmos claramente cientes disso, substituímos essas partes variáveis por certas outras representações e observamos os valores de verdade que essas proposições assumem. [...] Dada uma proposição, poderíamos simplesmente perguntar se ela é verdadeira ou falsa. Mas algumas propriedades muito notáveis das proposições podem ser descobertas se, além disso, considerarmos os valores de verdade de todas as proposições que podem ser geradas a partir dela, se tomarmos algumas

[6] Dutihl-Novaes (2011, p. 306). Nossa tradução. Lê-se no original: "For centuries, this was the predominant view of what it means to be formal until, in his 1936/2002 paper, Tarski outlined the limitations of letting variation operate solely on terms. He was concerned, in particular, with the possibility of the language lacking terms for all objects; for this reason, he proposed a reformulation of the notion of the formal as variability, namely that variation should be a procedure concerning objects (objects in the world or mathematical constructions), not terms. This in turn consolidated the notion of the formal as indifference to individuals."

[7] Berg (1973, p. 5). O autor continua: "The expression '$x\Sigma A$' will mean, then, that x comes under the idea A. The extension of A may be identified with the set K of all x such that $x\Sigma A$. If K is nonempty, Bolzano calls it the 'Umfang' of A (WL §66). A fundamental postulate schema for the primitive relation Σ: is hinted at by Bolzano (WL §§48, 69, Note 1): (a) There is an idea A such that, for all x, x1:A if and only if $\phi(x)$, where 'ϕ' is (within certain limits) an arbitrary predicate of a presupposed language system. This corresponds to an axiom of abstraction in set theory and asserts that in general a predicate expresses an idea in itself."

> de suas representações constituintes como variáveis e as substituirmos por quaisquer outras representações.[8]

> E eu digo que as proposições M, N, O ... seriam deriváveis das proposições A, B, C, D ..., com respeito às variáveis i, j,..., se todo conjunto de ideias que faz A , B, C, D ... verdadeiras quando substituído por i, j, ... também torna M, N, O ... verdadeiros. Por uma questão de variedade, também direi às vezes que as proposições M, N, O ... decorrem ou podem ser inferidas ou concluídas a partir do conjunto de proposições A, B, C, D ... chamarei de proposições A , B, C, D ... os antecedentes ou premissas, M, N, O ... que são obtidos a partir das consequências ou conclusões.[9]

> O 'segue-se necessariamente' dificilmente pode ser interpretado de outra maneira que esta: que a conclusão se torna verdadeira *sempre que* as premissas são verdadeiras. Agora é óbvio que não podemos dizer de uma e da mesma classe de proposições que uma delas se torna verdadeira *sempre que* a outra é verdadeira, a menos que consideremos algumas de suas partes como variáveis ... A formulação desejada era esta: assim que a troca de certas representações torna as premissas verdadeiras, a conclusão também deve se tornar verdadeira.[10]

Resumidamente, a teoria da derivabilidade de Bolzano conta com a substituição das partes variáveis de uma proposição que, no caso, são as "representações" ou "ideias". A condição necessária requerida para caracterizar uma relação de derivação é

[8]Bolzano *apud* Coffa (1972 [1991], p. 34). Nossa versão feita a partir da tradução em inglês apresentada na obra de Coffa (1991): "We often take certain representations in a given proposition to be variable and, without being clearly aware of it, replace these variable parts by certain other representations and observe the truth values which these propositions take on. [...] Given a proposition, we could merely inquire whether it is true or false. But some very remarkable properties of propositions can be discovered if, in addition, we consider the truth values of all those propositions which can be generated from it, if we take some of its constituent representations as variable and replace them by any other representations whatever."

[9]Bolzano (1973, p. 202). Nossa versão feita a partir da tradução inglesa de 1973: "And I say that propositions M, N, O ... would be derivable from propositions A, B, C, D ... , with respect to the variables i, j, ..., if every set of ideas which makes A, B, C, D ... all true when substituted for i,j, ... also makes M, N, O ... all true. For the sake of variety, I shall also sometimes say that propositions M, N, O ... follow from or can be inferred or concluded from the set of propositions A, B, C, D ... I shall call propositions A, B, C, D ... the antecedents or premises, M, N, O ... which are obtained from them consequences or conclusions."

[10]Bolzano *apaud* Asmus & Restall (1972 [2012], p. 31). Nossa versão a partir da tradução inglesa: "The 'follows of necessity' can hardly be interpreted in anu other way than this: that the conclusion becomes true *whenever* the premises are true. Now it is obvious that we cannot say of one and the same class of propositions that one of them becomes true *whenever* the other are true, unless we envisage some of their parts as variable... The desired formulation was this: as soon as the exchange of certain representations makes the premisses true, the conclusion must also become true."

o valor de verdade que deve ser preservado para a proposição, mediante uma substituição adequada das partes variáveis.[11] Como Asmus e Restall destacam, quando Bolzano fala de substituição de representações por representações, parece que sua teoria busca operar por meio da preservação da verdade de "valores semânticos de sentenças para valores semânticos, através da substituição de objetos por objetos, propriedades por propriedades."[12]

Em parte, as semelhanças apontadas podem ser resumidas nos seguintes aspectos: (1) ambos os autores baseiam suas definições sobretudo na variabilidade dos termos não lógicos, em detrimento dos termos lógicos. (2) a ideia de preservação da verdade é presente e é tratada como uma condição necessária para a definição. Porém, há diferenças relevantes entre as duas propostas. Vejamos algumas.

A teoria de Bolzano trabalha com proposições e ideias nelas mesmas, relativas à linguagem natural, e a formulação de Tarski é construída para sentenças de uma linguagem formalizada. Em relação ao esquema apresentado por ambos os autores onde ocorre a variação dos termos não lógicos, Bolzano fala de *substituição*, enquanto Tarski fala em *satisfação*. Como vimos anteriormente, a noção de satisfação é usada por Tarski para definir a ideia de modelo para determinada interpretação. Apesar de Bolzano possivelmente também ter uma inspiração matemática, como destaca Dutihl-Novaes, parece que a teoria de Tarski, ao usar uma definição recursiva para formular a ideia de satisfação e então a noção de modelo, vai mais além em relação a precisão de sua caracterização.[13]

Por último, o ponto que talvez mais distancie os dois autores, é quando observamos a maneira atual como costumamos pensar consequência lógica a partir de modelos. A abordagem tarskiana (considerando aqui como pelo menos uma grande influência para a moderna teoria padrão de modelos) é, no geral, entendida como relativa à interpretações e domínios que podem ser diversos. Tal consideração, segundo Berg, não pode ser extraída da teoria de Bolzano, a qual opera sob um único domínio.[14] Além disso, ambas as propostas dependem essencialmente da distinção entre termos lógicos e não lógicos, o que Tarski admite ser um problema relevante o qual não é capaz

[11] DUTIHL-NOVAES (2011, p. 309): "Bolzano may have indeed taken inspiration from mathematics, as the general procedure of considering schemata and filling in the 'empty spaces' designated by variables with denoting terms (numbers or letters denoting specific magnitudes) is also at the core of (algebraic) mathematics. Hence, besides the logical influence stemming from the medieval Aristotelian tradition (with which Bolzano was well acquainted), schematic formality may also be rooted in mathematical practice [. . .]."

[12] ASMUS & RESTALL (2012, p. 32).

[13] DUTIHL-NOVAES (2011, p. 311).

[14] BERG (1973, p.21–22): " In modern logical semantics we say that a sentence S_2 is a consequence of S_1 if every interpretation over any domain that makes S_l true also makes S_2 true. Hence we generalize universally over both interpretations and domains. Bolzano's quantification over sequences of ideas in themselves [. . .] corresponds rather closely to our quantification over interpretations. Bolzano never made explicit reference to the domain, however, and never thought of combining quantification over domains with generalization over ideas in themselves."

de oferecer um critério claro para tal distinção, destacando que talvez investigações posteriores iluminem essa questão.

> Subjazendo a toda a nossa construção, está a divisão de todos os termos da linguagem discutida em lógicos e extra-lógicos – divisão que certamente não é arbitrária. Se, por exemplo, fôssemos incluir entre os sinais extra-lógicos o sinal da implicação, ou o quantificador universal, então, nossa definição do conceito de consequência conduziria a resultados que obviamente contradizem o uso comum. Por outro lado, não é de meu conhecimento nenhum fundamento objetivo que permita traçar uma fronteira precisa entre os dois grupos de termos.[15]

Além disso, podemos destacar que o elemento variacional da teoria de Bolzano é substitucional, aspecto que Tarski explora quando formula sua condição (F), e que conclui não ser suficiente para caracterizar uma noção de consequência, na medida que essa formulação fica restrita à riqueza da linguagem em questão. Assim, uma diferença crucial, apesar de ambas as teorias usarem a variação em detrimento da forma, é que Tarski sofistica esse requisito quando utiliza técnicas matemáticas como recursividade para definir satisfabilidade, noção a qual é usada no lugar de uma simples substituição.

4.2 Algumas críticas de Etchemendy

É comum atribuir aos trabalhos de Tarski sobre o conceito de verdade e a noção de consequência lógica o estatuto de marco nos estudos semânticos formais que proporcionaram a teoria de modelos como a conhecemos atualmente. Isso talvez se deve em parte por algumas leituras possíveis de seus trabalhos, nos quais conceitos como interpretação, satisfação e modelo, exercem um papel relevante. Entre os autores que se propuseram discutir o trabalho de Tarski, no que diz respeito a noção de consequência lógica, destaca-se as investigações feitas por Etchemendy, o qual tem apresentado diversos pontos que questionam a atribuição histórica de que os trabalhos de Tarski geraram a moderna teoria padrão de modelos.[16]

[15] Tarski (1936 [2007], p. 245). Ao final do artigo, o autor finaliza: "Pesquisas ulteriores irão, sem dúvida, clarificar em muito o problema que nos interessa. Talvez seja possível encontrar importantes argumentos objetivos que permitam justificar a fronteira tradicional entre expressões lógicas e extra-lógicas. Mas também considero bem possível que as investigações não tragam nenhum resultado positivo nessa direção, de modo que sejamos compelidos a ver conceitos como 'consequência lógica', enunciado analítico' e 'tautologia' como conceitos relativos que precisam, em cada ocasião, ser relacionados com uma divisão definida, embora em maior ou menor grau arbitrário, dos termos em lógicos e extra-lógicos. A flutuação no uso comum do conceito de consequência seria – ao menos em parte – naturalmente refletida em tal situação compulsória."

[16] Etchemendy (1988, 1990).

Para os nossos objetivos, é interessante observarmos, de maneira geral, alguns pontos desse questionamento, na medida em que nos dias atuais, a abordagem modelo-teórica, é bastante difundida na formulação das diversas propriedades lógicas, das quais, em geral, partem os livros-textos da disciplina lógica. A pergunta então que podemos fazer é: o que as investigações tarskianas, em especial, sobre consequência lógica, dizem respeito à disciplina lógica atual, mais especificadamente em relação à abordagem modelo-teórica? Segundo Etchemendy, a atribuição comumente (não tão comum nos dias de hoje) feita a Tarski, da paternidade da teoria de modelos, está equivocada. Vejamos alguns pontos que o autor aborda para defender seu ponto de vista.

Para Etchemendy, há duas principais divergências entre a atual teoria de modelos e a teoria da consequência lógica de Tarski. A primeira diz respeito à maneira como a variação de domínio é considerada em ambas as teorias; e o segundo ponto diz respeito a como Tarski considera o caso das teorias ω-incompletas e as regras ω. Antes, vamos relembrar brevemente como a formulação de consequência lógica é desenvolvida em 1936 por Tarski.

Na Seção 3.3 vimos como Tarski utiliza a noção de modelo, a qual segundo a perspectiva do autor, atende aos requisitos de uma noção intuitiva de consequência lógica. Com a noção de modelo construída por Tarski utilizando a noção de satisfação, podemos então entender que uma sentença X é consequência de um conjunto K de sentenças se o modelo que torna as sentenças de K verdadeiras, também torna X verdadeiro. Vale lembrar que a teoria assim formulada é desenvolvida pela substituição das constantes não lógicas das sentenças da teoria, por variáveis correspondentes, mantendo a coerência nessa substituição. Com isso, transformamos as sentenças da teoria em funções sentenciais, obtendo de K, o conjunto K′ e de X, X′, que correspondem a essas sentenças. A noção de modelo pode então ser entendida como um conjunto de objetos que satisfaz tais funções sentenciais. Desta maneira, podemos considerar que uma consequência lógica é dada a partir de um modelo que torna tanto X′ quanto K′ verdadeiras. Além disso, é importante que a verdade seja preservada não importa o que substitua as variáveis desde que uma vez as premissas sendo verdadeiras a conclusão também o seja a partir do mesmo modelo. Em outras palavras, uma sentença ϕ é consequência de um conjunto Γ de premissas, se o modelo que torna Γ verdadeiro, também torna ϕ verdadeiro. Nessa perspectiva, um modelo nada mais é que um conjunto de objetos que satisfaz as funções sentenciais obtidas com K′ e X′, como mencionado anteriormente.

Tendo em mente a formulação apresentada acima, Etchemendy argumenta que não se observa no artigo de 1936, qualquer indicativo de que o domínio dos quantificadores possa ser variável, além de que, na teoria de Tarski, os quantificadores são considerados como constantes lógicas. O requisito de que "o domínio seja variável e se examine todas as reinterpretações das constantes não lógicas", observa o autor, é uma pressuposição usual da teoria de modelos.[17] Ao invés disso, o que se pode notar na teoria de Tarski, é que as constantes lógicas usualmente escolhidas, tem seus significados preservados, isto é, são considerados com uma interpretação fixa. Isso faz com que sentenças como $\exists x \exists y\ (x \neq y)$ sejam verdadeiras. A partir disso, Etchemendy ressalta:

> Basicamente, o problema é que a análise tarskiana apenas permite variações independentes em nossa interpretação das constantes não lógicas escolhidas, enquanto a teoria de modelos introduz uma dependência crucial entre o domínio do quantificador e a interpretação de outros parâmentros: a interpretação do último deve sempre ser extraída a partir do domínio escolhido.[18]

Além dessa consideração, Etchemendy analisa o argumento de Tarski envolvendo o caso das chamadas teorias ω-incompletas, e aponta que, no caso em que Tarski defende que uma inferência baseada em uma regra-ω, a qual permitiria concluir uma sentença geral a partir de um conjunto contendo as premissas $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, não é uma inferência válida na teoria de modelos.

> [. . .] na flexibilidade que Tarski permite em nossa escolha de constantes "lógicas". Claramente, se escolhermos tratar os algarismos '0', '1', '2', . . . , como constantes lógicas, bem como o quantificador 'cada número natural', então a sentença 'A' sairá uma consequência das sentenças infinitas $A_0, A_l, A_2, \ldots$; afinal, qualquer conjunto que contém cada número natural contém cada número natural[19]

Assim, como explica Simmons, em relação as investigações de Etchemendy, se esta leitura da teoria de Tarski está correta, então ela difere da teoria de modelos.[20] Desta forma, Etchemendy identifica o fator que relaciona a teoria de modelos com os trabalhos de Tarski:

---

[17] Etchemendy (1988, p. 69).

[18] Etchemendy (1988, p. 69). Nossa tradução. Lê-se no original: "Basically, the problem is that the Tarskian analysis only allows for independent variations in our interpretation of the chosen nonlogical constants, while the model-theoretic account introduces a crucial dependence between the domain of quantification and the interpretation of the other parameters: the interpretation of the latter must always be drawn from within the chosen domain."

[19] Etchemendy (1988, p. 73). Nossa tradução. Lê-se no original: "[. . .] "in the flexibility Tarski allows in our choice of "logical" constants. Clearly, if we choose to treat the numerals '0', '1', '2',..., as logical constants, as well as the quantifier 'every natural number', then sentence A will come out a consequence of the infinite sentences $A_0, A_l, A_2, \ldots$; after all, any set that contains each natural number contains every natural number."

[20] Simmons (2009, p. 562–563).

> Podemos pensar na análise modelo teórica padrão das noções lógicas como envolvendo duas características, variação no domínio da quantificação e reinterpretação das constantes não lógicas. Em vários lugares, Tarski deu tratamentos explícitos de ambas essas noções: o primeiro ele tratou extensivamente na monografia da verdade; o segundo é, de fato, a técnica usada para definir noções lógica em seu artigo de 1936. A teoria padrão [de modelos] resulta em colocar essas duas características juntas de uma forma particular, o que é precisamente o que Tarski não fez.[21]

Etchemendy também investiga a concepção de verdade formulada por Tarski e que endossa seu argumento de que as contribuições de Tarski, de 1933 e 1936, não pode ser considerada como teorias relacionadas à teoria de modelos. Analisando conceitos desenvolvidos por Tarski, como a noção de verdade, Etchemendy levanta dúvidas sobre se o projeto de Tarski, de fato, coincide com os objetivos da teoria de modelos como a entendemos.

Entre os muitos conceitos analisados, Etchemendy também distingue duas nuances que uma investigação da verdade pode apresentar: verdade em uma linguagem e verdade no mundo. A partir dessa diferença, o autor levantará algumas questões para a moderna teoria de modelos. Além disso, tal distinção, dará base para o que posteriormente o autor distinguirá em relação à abordagens semânticas distintas, e das quais a teoria moderna de modelos pertence a uma e o projeto original de Tarski parece estar comprometido com outra. Vejamos brevemente as impressões que o autor chama a atenção.

Em seu artigo *Tarski on truth and logical consequence*, de um ponto de vista histórico, Etchemendy observa duas principais vertentes de investigações praticadas posteriormente a publicação do artigo de 1933 de Tarski. Identificadas como:

(1) Análise da verdade e paradoxo semântico;

(2) E o que atualmente chama-se semântica formal.

A vertente (1), segundo o autor, parte-se desde a publicação dos trabalhos de Kripke, que se direcionam à investigações relacionadas a paradoxos semânticos na linguagem natural. Já a vertente (2), área da semântica formal, pode ser observada como dividida em dois principais grupos:

[21] Etchemendy (1988, p. 70). Nossa tradução e ênfase. Lê-se no original: "We can think of the standard, model-theoretic analysis of the logical notions as involving two features, variation in the domain of quantification and reinterpretation of the nonlogical constants. In various places, Tarski gave explicit treatments of both of these notions: the first he treated extensively in the monograph on truth; the second is, in effect, the technique used to define the logical notions in his 1936 article. The standard account results from putting these two features together in a particular way, and that is precisely what Tarski did not do."

(2.1) Condicionais de verdade semântica, com o trabalho de Davidson;

(2.2) A teoria de modelos semânticos.

A partir dessa constatação, Etchemendy questiona: como a monografia de Tarski proporciona o surgimento de duas áreas de pesquisa independentes?[22] Para responder essa pergunta, é claro, é preciso investigar a fundo tanto a obra de Tarski a respeito, quanto o contexto em que ela é desenvolvida. Assim, segundo Etchemendy, a intenção de Tarski se encontra no primeiro grupo citado: a análise da verdade. Porém, a forma como o autor aborda e elabora esse expediente, pode ser utilizada para caracterizar ambas as áreas. Sobre os objetivos de Tarski, o autor destaca:

> Como é claro nas sessões introdutórias da monografia [sobre a noção de verdade], a preocupação de Tarski foi [. . .] a análise da verdade. Mas acontece que a forma como a solução aparece, pelo menos à primeira vista, serve igualmente como uma caracterização de propriedades semânticas da linguagem cujo o predicado verdade é definido. Essa aparência, é o que, em última análise deu origem ao importante campo da semântica formal.[23]

Porém, como destaca o estudioso, é um erro atribuir à obra de Tarski sobre verdade que seja pertencente à vertente das investigações da semântica formal (como feita atualmente), pelo fato de que Tarski tem como objetivo fornecer uma definição "eliminativa de verdade". E, nesse sentido, a investigação tarskiana parece apenas tentar "absorver conceitos semânticos" dentro de uma metateoria que não contém conceitos semânticos. Etchemendy então destaca:

> Semântica formal, em contraste, deve pressupor uma noção de verdade metateórica fixa, a qual então é empregada na caracterização de propriedades semânticas da linguagem. Tarski não está fazendo semântica, pelo menos não na acepção comum do termo, mas há mais divergência do que apenas isto. Pois, sem deixar de lado o objetivo principal de Tarski, há um sentido o qual semântica simplesmente não pode ser feita.[24]

[22]Etchemendy (1988, p. 52).

[23]Etchemendy (1988, p. 52). Nossa tradução. Lê-se no original: "As is clear from the introductory sections of the monograph, Tarski's own concern was the former project, the analysis of truth. But it happens that the form his solution takes appears, at least at first glance, to serve equally as a characterization of the semantic properties of the language whose truth predicate is defined. This appearance is what ultimately gave rise to the important field of formal semantics."

[24]Etchemendy (1988, p. 53). Nossa tradução.Lê-se no original: "formal semantics, in contrast, must presuppose a fixed, metatheoretic notion of truth, which it then employs in characterizing the semantic properties of the language. Tarski was not doing semantics, at least in the commonly accepted sense of the term, but there is more to the divergence than just that. For without setting aside Tarski's principal goal, there is a sense in which semantics simply cannot be done."

Assim, Etchemendy destaca que, na intenção de investigar a pertinência de conceitos como verdade e consequência, apesar de tais concepções serem formuladas a partir de técnicas similares, não podem ser entendidas como pertencentes de uma mesma teoria (ou um projeto semântico).

> O que Tarski viu claramente, e expressou enfaticamente no artigo de 1936, foi primeiro, a necessidade de prover uma análise explícita de nossos conceitos intuitivo de verdade lógica e consequência lógica, e segundo, a possibilidade de aplicar suas técnicas semânticas na definição rigorosa dessas noções. Além disso, ele deu uma definição independente de consequência, ao invés de reduzir essa noção à noção de verdade lógica. O que Tarski não ofereceu, ao contrário da opinião comum, é uma teoria equivalente às definições modelo-teóricas usuais.[25]

Em seu livro intitulado *The concept of logical consequence*, há duas perspectivas para entender a teoria dos modelos levantadas por Etchemendy, a partir das quais, permite ao autor questionar certo entendimento histórico usual em relação à Tarski e a teoria de modelos padrão atual, no sentido do trabalho tarskiano ser o início dessa abordagem. Essa crítica pode ser feita se considerarmos que é possível entender a teoria de modelos sob duas perspectivas, uma *representacional* e uma *interpretacional*.[26]

Porém, segundo a análise empreendida por Etchemendy, a partir da maneira que entendemos um modelo, não podemos considerar a teoria tarskiana de consequência como sendo a mesma praticada na teoria padrão de modelos como atualmente a entendemos. Isso porque, nos dias de hoje, em nossa concepção de consequência lógica (em termos de modelos), consideramos que uma determinada sentença para ser consequência de um determinado conjunto de sentenças, isto é, nosso entendimento de um argumento válido, decorre do fato de para *qualquer* modelo, ou seja, qualquer *interpretação* que torne as premissas verdadeiras, torne também a conclusão verdadeira.

Isso parece contrariar a maneira como Tarski pensou sua teoria, pois, a variação interpretacional ocorre a partir da distinção entre constantes lógicas e não lógicas as quais, diferente da teoria de modelos, têm suas interpretações fixas. A principal diferença emerge do fato de considerarmos entre as constantes lógicas os quantificadores. Dessa forma, as interpretações que venham a gerar modelos para a linguagem sempre

[25] ETCHEMENDY (1988, p. 68). Nossa tradução. Lê-se no original: "What Tarski saw clearly, and emphatically expressed in the 1936 article, was first, the need to provide an explicit analysis of our intuitive concepts of logical truth and logical consequence, and second, the possibility of applying his semantic techniques to the rigorous definition of these notions. In addition, he gave an independent definition of consequence rather than trying to reduce this notion to that of logical truth. What Tarski did not give, contrary to the received opinion, is an account equivalent to the usual model-theoretic definitions."

[26] ETCHEMENDY (1999, p. 12–26; 51–64).

estarão condicionadas ao escopo dos quantificadores em relação ao domínio que eles correspondem, o que difere da teoria de modelos atual.

A partir da distinção entre semântica interpretacional e semântica representacional, é possível também levantar algumas questões filosóficas em relação à noção de consequência lógica definida em termos de modelos como a entendemos, em relação à alguns aspectos comumente requiridos para essa noção. A questão dessa formulação é como podemos garantir o requisito de necessidade de uma relação de consequência quando estamos tratando de modelos cuja as interpretações podem ser diversas, ou seja, uma enorme gama de possibilidades. Se considerarmos que uma relação de consequência lógica deve ser identificada como aquela que acomoda a preservação da verdade em relação a modelos, então devemos entender que tal relação deve ser considerada sob todos os mundos possíveis, isto é, sob todas as interpretações possíveis, se quisermos capturar a ideia de necessidade nessa noção, o que nos leva para uma abordagem representacional. Porém, isso acarreta problemas em relação ao aspecto formal da relação de consequência, no sentido de haver dificuldades para elencarmos critérios para separarmos constantes lógicas das não lógicas. Por outro lado, se pressupormos uma abordagem interpretacional, por não se considerarem interpretações de mundos possíveis, apenas um mundo (atual), então teremos dificuldades em atender o requisito de necessidade que deve apresentar uma relação de consequência, a partir da ideia de como entendemos essa noção.

Considerações finais

Diante das questões que abordamos ao longo desta dissertação, observamos aspectos referentes ao contexto e algumas implicações das teorias de Tarski sobre consequência. Parece que em vista do contexto que foi aqui apresentado, podemos localizar a teoria sobre consequência de Tarski em duas principais abordagens distintas, dedutivo-teórica e semântica. Em relação a primeira categoria, podemos dizer que, no geral, ela pressupõem uma abordagem pré–teórica baseada na ideia de que em uma relação de consequência lógica, nosso aparato dedutivo é capaz de transferir a verdade de um conjunto de sentenças para uma determinada sentença. Alfred Tarski, em 1930, aprimorou essa ideia estipulando características específicas que tal relação deve conter e, com isso, também pode-se considerar, que a ideia da abordagem por propriedades de uma consequência, acaba sendo sugerida, mesmo que ainda seja em termos sintático-formais. A diferença então entre Tarski, Frege e Hilbert, é que nos trabalhos desses dois últimos, a relação é dada pelo aspecto: "pode ser derivada a partir das regras de inferência"; ao contrário da formulação de Tarski, em que a relação de consequência é dada por características axiomáticas gerais, podendo até ser formulada como uma função.

Em relação à teoria de 1936, que pode ser situada na tradição semântica, parece apresentar uma definição que pressupõe uma abordagem estritamente por propriedades da noção de consequência lógica. Também não é claro se Tarski a pensou como uma tentativa de formular uma definição concorrente como do operador. Tais noções, apesar de serem desenvolvidas num âmbito bastante geral, parecem ter seus expedientes reservados. A noção de demonstração puramente sintática, em nada perdeu sua pertinência. E a noção de consequência lógica, pode ser entendida como a tentativa de caracterizar nossas intuições sobre tal noção em uma definição precisa, que pode ser usada em investigações matemáticas ou metamatemáticas.

Há controvérsias quanto a atribuir o sucesso das investigações de Tarski como responsável diretamente para a consolidação da moderna teoria de modelos. Porém, é certo que as contribuições de Tarski influenciaram decisivamente os estudos de lógica e, mesmo que não tenham sido responsáveis de maneira direta na construção de nossa concepção atual de lógica, ou mais especificadamente, nossa concepção modelo-teórica de consequência lógica, parece ser indubitável que os trabalhos de Tarski, na medida em que trouxeram inovação quanto às técnicas de análise aplicadas de maneira inédita nesses tópicos, pavimentaram o caminho que a lógica percorreu até nós.

Referências Bibliográficas

A Trabalhos de Alfred Tarski

TAJTELBAUM [TARSKI], A. 1921. Przyczynek do aksjomatyki zbioru dobrze uporządkowanego. *Przegląd Filozoficzny*, 25: 85–94.

TAJTELBAUM [TARSKI], A. 1923. O wyrazie pierwotnym logistyki. *Przegląd Filozoficzny*, 26: 68–89.

TARSKI, A. 1924a. Sur les truth-functions au sens de M M. Russell et Whitehead. *Fundamenta Mathematicae*, 5: 59–74.

TARSKI, A. 1924b. Sur les ensemble finis. *Fundamenta Mathematicae*, 6: 45–95.

TARSKI, A. 1924c. Sur quelques théorèmes qui èquivalent à l'axiome du choix. *Fundamenta Matematyczno-fizyczny*, 2: 47–60.

TARSKI, A. 1924d. O równoważności wielokątów. *Przegląd Matematyczno-fizyczny*, 2: 47–60.

TARSKI, A. 1924e. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6: 244–277. (em colaboração com S. Banach)

TARSKI, A. 1926. Communication sur les recherches de la théorie des ensembles. In: *Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematycznych i Przyrodniczysch*. Warszawa, 19: 299–330. (em colaboração com A. Lindenbaum)

TARSKI, A. 1930a. Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. *Fundamenta Mathematicae*, 15: 292–300. (Em colaboração com W. Sierpiński)

TARSKI, A. 1930b. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1930b, 37: 361–404.

TARSKI, A. 1930c. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. In: *Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych*. 1930c, 23: 30–50. (Em colaboração com J. Łukasiewicz)

TARSKI, A. 1931. Les opérations logiques et les ensembles projectifs. *Fundamenta Mathematicae*, 17: 240–248. (em colaboração com C. Kuratowski).

TARSKI, A. 1933. Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, 40: 97–112.

TARSKI, A. 1935a. Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. I, *Fundamenta Mathematicae*, 24: 177–198.

TARSKI, A. 1935b. Grundzüge des Systemankalküls. Erster Teil. *Fundamenta Mathematicae*, 25: 503–526.

TARSKI, A. 1935c. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*, 1: 261–405.

TARSKI, A. 1936a. O ugruntowaniu naukowej semantyki. *Przeglad Filozoficzny*, 39: 50-57.

TARSKI, A. 1936b. E O pojećiu wynikania logicznego. *Przeglad Filozoficzny*, 39: 59-68.

TARSKI, A. 1956. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Papers from 1923 to 1938. Tradução de J. H. Woodger. Oxford: Clarendon Press.

TARSKI, A. 1994. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. 4a ed. Oxford: Oxford University Press.

TARSKI, A. 1995. Some Current Problems in metamathematics. *History and Philosophy of Logic*, 16, 159–168.

TARSKI, A. 2007. *A concepção semântica da verdade*. Textos clássicos de Tarski. Tradução de C. BRAIDA [et al.]. Organizado por C. A. Mortari e L. H. de A. Dutra. São Paulo: Editora Unesp.

TARSKI, A. 2016. *Conferências na Unicamp em 1975 – Lectures at Unicamp in 1975*. Transcrição, organização e edição por L. Suguitani, J. P. Viana, e I. M. L. D'Ottaviano. Campinas: Editora Unicamp.

B Demais referências bibliográficas

ASMUS & RESTALL. A History of the consequence relations. In: GABBAY, D. M. PELLETIER, J. F. and WOODS, J. *Handbook of the History of Logic*. v. 11. Amsterdam: Elsevier B. V., 2012.

AVIGAD, J. & E. H. RECK. 2001. *Clarifying the nature of the infinite* - The development of metamathematics and proof theory. Pittsburgh: Carnegie Mellon.

BEALL, J., G. RESTALL & G. SAGI. 2019. Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [acesso em dez/2020]. Disponível em: plato.stanford.edu

BETTI, A. 2004. Leśniewski's early Liar, Tarski and natural language. *Annals of Pure and Applied Logic*, 127(1-3): 267–287.

BÉZIAU, J. Y. 2005. From consequence operator to universal logic: A survey of general abstract logic. *Logica Universalis*, 3–7.

BLANCHÉ, R & DUBUCS, J. 2001. *História da lógica*. Lisboa: Edições 70.

BLANCHETTE, P. A. 2001. Logical Consequence. *The Blackwell Guide To Philosophical Logic*.

BLOCK & PIGOZZI. Alfred Tarski's Work on General Metamathematics. *The Journal of Symbolic Logic*. Mar., 1988, 53 (1), 36-50.

BOCHEŃSKI, I. M. 1985. *Historia de la lógica formal*. Madrid: Editorial Gredos.

CORCORAN, J. 2003. Aristotle's Prior Analytics and Boole's Laws of Thought. *History and Philosophy of Logic*. 24: 261–288.

CORCORAN, J. 1973. Meanings of implication. *Dialogos*, 9: 59–76.

DUTRA, L. H. A. *Verdade e Investigação*: o problema da verdade na teoria do conhecimento. 2 ed. rev. Florianópolis : Edição do autor, 2020.

ETCHEMENDY, J. 1999. *The concept of logical consequence*. California: CSLI Publications.

FEITOSA, H., MOREIRA, A. & SOARES, M. 2006. *Operadores de Consequência e Relações de Consequência.* Kínesis, 18 (8), 156–171.

FEFERMAN, A. B. & S. FEFERMAN. 2004. *Alfred Tarski – Life and logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

FREGE, G. Begriffsschrift. 1967. In: HEIJENOORT, J. *From Frege to Gödel*.A source book in mathematical logic. 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press.

FREGE, G. Grundgesetze der arithmetik. 1960. In: GEACH, P. & M. BLACK. (eds.). Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege. Oxford: Basil Blackwell.

FREGE, G. 1971. Os fundamentos da aritmética. Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Seleção e tradução de L. H. dos Santos. In:*Os Pensadores XXXVI*. São Paulo: Abril Cultural.

FREGE, G. 1971. Sobre a justificação científica de uma conceitografia. Seleção e tradução de L. H. dos Santos. In: *Os Pensadores XXXVI*. São Paulo: Abril Cultural.

FREGE, G. 1964. *The basic laws of arithmetic. Exposition of the System*. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press.

GABBAY, D. M. & J. WOODS, (eds.) 2009. *Handbook of the history of logic*, vol. 5: Logic from Russell to Church. Amsterdam: North-Holland, Elsevier.

GIVANT, S. R. 1986. Bibliography of Alfred Tarski. *The Journal of Symbolic Logic*, 51(4): 913–941.

GIVANT, S. R. 1991. A Portrait of Alfred Tarski. *The Mathematical Intelligencer*, 13(3): 16–32.

GIVANT, S. R. 1999. Unifying threads in Alfred Tarski's Work. *The Mathematical Intelligencer*, 21(1): 47-58.

GÖDEL, K. 1979. O teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. LOURENÇO, M. (org.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

GOMES, E. L. & I. M. L. D'OTTAVIANO. 2017. *Para além das Colunas de Hércules, uma história da paraconsistência*: de Heráclito a Newton da Costa. Campinas, SP: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. Editora da Unicamp.

GÓMEZ-TORRENTE, M. 1996. Tarski on Logical Consequence. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(1): 125–151.

HANSON, W. H. 1997. The Concept of Logical Consequence. *The Philosophical Review*, 106 (3): 365–409.

HILBERT, D. 1996. The logical foundations of mathematics. In: EWALD, W. (org.). *From Kant to Hilbert*: A source book in the foundations of mathematics. Oxford: Clarendon Press.

HILBERT, D. & W. ACKERMANN. 1950. *Principles of Mathematical Logic*. New York. Chelsea.

HILBERT, D. *Sobre o infinito*. 1925. Tradução de Marcello Papini. Gottingen, 161–190. [acesso em: out./2020] Disponível em: `http://www.mat036.ufba.br/HILBERT2.PDF`.

KIRKHAM, R. *Theories of truth*: a critical introduction. Massachusetts: The MIT Press, 2001.

KLEENE, S. C. 1971. *Introduction to metamathematics*. xxx:North-Holland and Wolters-Noordhoff.

KNEALE, W. & M. KNEALE. 1980. *O desenvolvimento da lógica*. 2ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

LUSCHEI, E. C. *The logical system of Lesniewski*. Amsterdam: North-Holland, 1962.

ŁUKASIEWICZ, J. 1910/1971. On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics*, 24: 485–509.

ŁUKASIEWICZ, J. 1920. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*, 5: 170–171.

MATES, B. 1972. *Elementary logic*. 2ed. New York: Oxford University Press.

MENDELSON, E. 1997. *Introduction to mathematical logic*. 4ed. New York: Chapman & Hall.

MCFARLAND, A., J. MCFARLAND & J. T. SMITH, (eds.) 2014. *Alfred Tarski. Early Work in Poland- Geometry and Teaching*. New York: Springer.

MCKEON, M. W. 2010. *The concept of logical consequence: an introduction to philosophical logic*. New York: Peter Lang Publishing.

NAGEL, E. & J. R. NEWMAN. 2007. *A prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva.

NOVAES, C. D. *Formal languages in Logic: A Philosophical and Cognitive analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

NOVAES, C. D.The Different Ways in which Logic is (said to be) Formal. Oct. 2011, *History and Philosophy of Logic*, 32 (4), 303-332.

PATTERSON, D. 2012. *Alfred Tarski - Philosophy of Language and logic*. London: Palgrave Macmillan.

PRAWITZ, D. 1985. Remarks on some approaches to the concept of logical consequence. *Synthese*, 62: 153-171.

READ, S. 1994. Formal and Material Consequence. *Journal of Philosophical Logic*, 23 (3): 247-265.

SILVA, J. J. da. 2007. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora Unesp.

SHAPIRO, S. 2005. Logical consequence, proof theory, and model theory. In: SHAPIRO, S. (ed.) *The Oxford handbook of Philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press.

SHOENFIELD, J. R. 1967. *Mathematical Logic*: Addson-Wesley.

SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In: GABBAY, D.M., GUENTHNER, F. (eds) *Handbook of Philosophical Logic*. v. 2. Dordrecht: Springer, 2001.

SUPPES, P. Philosophical implications of Tarski's 'Work. T*he Journal of Symbolic Logic*. Mar., 1988, (53), (1), 80-91.

VAUGHT, R. L. Alfred Tarski's Work in Model Theory. *The Journal of Symbolic Logic*. Dec. 1986, 51 (4), Dec. 1986, 869-882.

VON PLATO, J. 2018. The Development of Proof Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [acesso em dez/2020]. Disponível em: `https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/`.

WÓJCICKI, R. 1988. *Theory of logical calculi*: basic theory of consequence operations. Berlin, Dordrecht: Springer Science+Business Media. (Synthese Library, 147)

WOLEŃSKI, J. 2014. Polish Logic. *Journal of Logic and Computation*, 12(5): 399–428.

WOLEŃSKI, J. 2015. Philosophy of exact sciences (lógica and mathematics) in Poland. 1918-1939. *Technical transactions/czasopismo techniczne*, 2-NP(20): 255–265.

WOLEŃSKI, J. Lvov-Warsaw School. 2019. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [acesso em out/2020]. Disponível em: plato.stanford.edu

ZACH, R. 2019. Hilbert's Program. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [acesso em dez/2020]. Disponível em: plato.stanford.edu