

1. Todo número aleatório gerado por um computador é verdadeiramente aleatório? Justifique sua resposta.
2. Qual a importância da semente (seed) na geração de números pseudoaleatórios?
3. Considere uma variável aleatória X com distribuição de Chen, com parâmetro $\theta > 0$, cuja função de distribuição acumulada (CDF) é dada por:

$$F(x) = 1 - \exp(-\theta(e^x - 1)), \quad x \geq 0$$

e função densidade de probabilidade (PDF) associada:

$$f(x) = \theta e^x \exp(-\theta(e^x - 1)), \quad x \geq 0$$

- (a) **Parte 1:** Escreva o algoritmo do método da inversa para gerar uma amostra aleatória da distribuição de Chen com parâmetro θ .
 - (b) **Parte 2:** Implemente o algoritmo para gerar uma amostra com $n = 10.000$ observações com $\theta = 2$ e construa o histograma com a densidade teórica sobreposta.
4. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição logística com média μ e desvio padrão s , ou seja, $X \sim \text{Logística}(\mu, s)$, com função de densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}{s \left(1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)\right)^2}$$

Onde: $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $s > 0$. E função de distribuição acumulada (CDF):

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}$$

- (a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar uma variável aleatória X que siga uma distribuição logística $\text{Logística}(\mu, s)$.
- (b) **Parte 2:** Considere $\mu = 3$ e $s = 1$. Gere uma amostra de 1000 observações de X usando o método da inversa. Faça um histograma dos dados com a curva teórica.

5. Considere uma variável aleatória X com distribuição Burr XII, com parâmetros $c > 0$ e $k > 0$, cuja função de distribuição acumulada (CDF) é dada por:

$$F(x) = 1 - (1 + x^c)^{-k}, \quad x \geq 0$$

e função densidade de probabilidade (PDF):

$$f(x) = ckx^{c-1}(1 + x^c)^{-(k+1)}, \quad x \geq 0.$$

- (a) **Parte 1:** Escreva o algoritmo do método da inversa para gerar uma amostra aleatória da distribuição Burr XII.
- (b) **Parte 2:** Implemente o algoritmo para gerar uma amostra com $n = 10.000$ observações considerando $c = 2$ e $k = 3$ e construa o histograma com a densidade teórica sobreposta.
6. Considere uma variável aleatória X com distribuição Kumaraswamy, com parâmetros $a > 0$ e $b > 0$, cuja função de distribuição acumulada (CDF) é dada por:

$$F(x) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad 0 < x < 1$$

e função densidade de probabilidade (PDF):

$$f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

- (a) **Parte 1:** Escreva o algoritmo do método da inversa para gerar uma amostra aleatória da distribuição Kumaraswamy.
- (b) **Parte 2:** Implemente o algoritmo para gerar uma amostra com $n = 10.000$ observações considerando $a = 2$ e $b = 5$ e construa o histograma com a densidade teórica sobreposta.
7. Uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Gumbel com parâmetros de localização α e de escala $\beta > 0$, ou seja, $X \sim \text{Gumbel}(\mu, \beta)$, tem função densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x - \alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \alpha}{\beta}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

E função de distribuição acumulada (CDF):

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \alpha}{\beta}\right)\right)$$

- (a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostra variável aleatória X que siga uma distribuição $\text{Gumbel}(\alpha, \beta)$.
- (b) **Parte 2:** Considere $\alpha = 4$ e $\beta = 1.5$. Gere uma amostra de 1000 observações da variável aleatória X usando o método da inversa e faça um histograma dos dados com a curva teórica.
8. Uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Lindley com parâmetro $\theta > 0$, ou seja, $X \sim \text{Lindley}(\theta)$, tem função densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{\theta^2}{1 + \theta}(1 + x) \exp(-\theta x), \quad x > 0$$

E função de distribuição acumulada (CDF) dada por:

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{\theta x}{1 + \theta}\right) \exp(-\theta x)$$

- (a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostras da variável aleatória $X \sim \text{Lindley}(\theta)$, com $\theta > 0$. Como a inversa fechada da CDF não é simples, utilize a função `uniroot` para resolver a inversa.
- (b) **Parte 2:** Considere $\theta = 2$, gere uma amostra de 1000 observações da variável X e faça um histograma dos dados com a curva teórica baseada na distribuição Lindley.
9. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (forma) e $\beta > 0$ (escala), ou seja, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. A função densidade de probabilidade (PDF) dessa distribuição é:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

E sua função de distribuição acumulada (CDF) dada por:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt$$

- (a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostras da variável aleatória $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Como a CDF não tem forma fechada, utilize as funções `integrate` e `uniroot` para resolver essa questão (Dica $\Gamma(\cdot)$ é calculado no R pela função `gamma()`).
- (b) **Parte 2:** Considere $\alpha = 2$ e $\beta = 2$, gere uma amostra de 1000 observações da variável X e faça um histograma dos dados com a curva teórica

10. Considere uma variável aleatória X com distribuição Normal Generalizada, com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} \exp \left[- \left(\frac{|x - \mu|}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Sua função de distribuição acumulada pode ser escrita como

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{\mu - x}{\alpha}\right)^\beta\right), & x < \mu, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^\beta\right), & x \geq \mu, \end{cases}$$

em que $P(a, z)$ representa a função gama incompleta regularizada. No R, utilize `pgamma(z, shape = a)` para calcular $P(a, z)$.

- (a) **Parte 1:** Implemente em R a função de distribuição acumulada $F(x)$. Utilize a função `pgamma()` para calcular a função gama incompleta regularizada.
- (b) **Parte 2:** Como a função quantil não possui uma expressão elementar simples, escreva um algoritmo utilizando inversão numérica para gerar observações dessa distribuição.
- (c) **Parte 3:** Utilize o algoritmo desenvolvido para gerar uma amostra com $n = 1.000$ observações considerando $\mu = 0$, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Construa o histograma da amostra gerada com a densidade teórica sobreposta.